Université de Montréal

Étude de situations de validation en algèbre vécues par des élèves de 13 et 14 ans à l'aide et sans l'aide d'un forum électronique

par

Manon LeBlanc

Département de didactique

Faculté des sciences de l'éducation

Thèse présentée à la Faculté des sciences de l'éducation
en vue de l'obtention du grade de doctorat
en enseignement
option didactique

juin, 2011

Université de Montréal
Faculté des études supérieures et postdoctorales

Cette thèse intitulée :

Étude de situations de validation vécues par des élèves de 13 et 14 ans à l'aide d'un forum électronique

Présentée par :

Manon LeBlanc

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Alejandro S. González-Martín, président-rapporteur
Sophie René de Cotret, directeur de recherche
France Caron, membre du jury
Claudine Mary, examinateur externe
Alejandro S. González-Martín, représentant du doyen de la FES

RÉSUMÉ

L'un des buts de l'apprentissage des mathématiques est le développement du raisonnement et celui-ci participe à la compréhension des mathématiques. Très liée au raisonnement, la notion de preuve est aussi fondamentale à l'apprentissage des mathématiques, car elle permet d'établir la validité d'arguments mathématiques et de conférer un sens à différents concepts à travers l'explication de l'organisation logique du travail effectué. Toutefois, malgré l'importance accordée au développement de différents types de raisonnements, plusieurs élèves éprouvent des difficultés lorsqu'ils sont appelés à concevoir ou à évaluer des preuves. Dans le cadre de cette recherche, nous avons étudié l'impact de l'utilisation d'un forum électronique sur le développement d'habiletés de validation algébrique ainsi que sur le développement d'habiletés en lien avec l'évaluation de preuves en algèbre chez des élèves de 13 et 14 ans du Nouveau-Brunswick et du Québec. Les résultats laissent supposer que l'utilisation du forum électronique encourage le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles, en plus de favoriser une utilisation adéquate des règles du débat mathématique.

Mots-clés : algèbre, forum électronique, preuve, raisonnement, règles du débat mathématique, situations de validation

ABSTRACT

One of the goals of learning mathematics is the development of reasoning, because it is essential to understand mathematics. Closely related to reasoning, the notion of proof is also fundamental in the learning of mathematics, because it allows students to establish the validity of mathematical arguments and put a sense on various concepts through logical explanation of their work. However, in spite of the importance placed on the development of the capacity to reason mathematically, several students are confronted with difficulties during the development or the evaluation of proofs. This study examined the impact of the use of a discussion forum on the development of algebraic validation skills as well as on the development of skills linked with the evaluation of the proof process in algebra with 13 and 14 year old students from New-Brunswick and Quebec (Canada). The results lead us to believe that the use of the electronic forum encourages the passage from pragmatic proofs to intellectual proofs. It also seems to facilitate an adequate use of the rules of the mathematical debate.

Keywords : algebra, electronic forum, proof, reasoning, rules of the mathematical debate, situations of validation

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

LISTE DES SIGLES ET DES ABRÉVIATIONS

CAMI : Chantier d'apprentissages mathématiques interactifs

CASMI : Communauté d'apprentissages scientifiques et mathématiques interactifs

MELS : Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport

MENB : Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick

TIC : Technologies de l'information et de la communication

TSD : Théorie des situations didactiques

Pour le nom des problèmes :

Act : Activité

Eq : Équipe

f : Forum

Ind : Individuel

Pré : Prétest

Post : Post-test

À mes parents, qui m'ont toujours encouragée dans mes nombreux projets
et qui n'ont jamais cessé de me dire de faire ce que je voulais dans la vie,
tant et aussi longtemps que j'étais heureuse. Je le suis…

À mon frère, l'une de mes plus grandes sources d'inspiration en enseignement.
J'espère un jour être une aussi grande pédagogue que toi.

REMERCIEMENTS

La réalisation d'une thèse nécessite la collaboration et le support de plusieurs personnes. Je tiens donc à remercier ces gens qui m'ont accompagnée et encouragée lors de la complétion de mes études doctorales.

D'emblée, je tiens à remercier de façon particulière ma directrice de thèse, madame Sophie René de Cotret. Les nombreux échanges que nous avons eus m'ont permis de préciser ma pensée, de voir les choses autrement, de remettre en questions certains éléments ou encore de naviguer sur des terrains théoriques inconnus. Merci pour votre disponibilité au fil des années, pour votre enthousiasme face à mon projet de recherche et pour la confiance que vous avez démontrée à mon égard.

Mes remerciements s'adressent également aux membres de mon jury. Dans un premier temps, merci à madame France Caron, qui, dès le début, m'a aidée à cibler mon objet de recherche et tout ce qui l'entoure. Merci aussi à monsieur Alejandro S. González-Martín, président du jury, pour la minutie dont il a fait preuve dans la correction de mon projet de recherche doctorale. Vos commentaires m'ont réellement amenée à clarifier ma pensée. Enfin, merci à madame Claudine Mary, examinatrice externe, qui a su m'amener à réfléchir plus en profondeur sur les éléments liés aux preuves et à la validation.

Un remerciement sincère est également destiné aux enseignants qui ont généreusement accepté de me donner de leur temps et de m'ouvrir leur salle de classe. Sans votre participation et votre dévouement, cette thèse n'aurait su voir le jour. Merci aussi aux élèves qui ont accepté de participer à ce projet de recherche. Le fruit de votre travail est au cœur de ma thèse.

Enfin, je tiens à remercier ma famille qui m'a sans cesse encouragée tout au long de ce projet. Plus particulièrement, je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes parents, Albini et Marcella, pour avoir cru en moi dès le début et pour m'avoir appuyée à chaque étape de ce long processus. Merci aussi à mon frère, Gino, pour son soutien et son encouragement. Votre support constant fût déterminant dans la réalisation de ma thèse.

INTRODUCTION

De nombreux auteurs soutiennent que le développement du raisonnement est essentiel à l’activité mathématique (Hanna, 2000; Martin et McCrone, 2001; Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2005; National Council of Teachers of Mathematics, 2005). Mais qu’est-ce que le raisonnement? S’inspirant de Peirce, Arsac et al. (1992) définissent le but du raisonnement comme la découverte de ce que nous ignorons à travers l’exploitation de nos connaissances actuelles. Raisonner, c’est donc faire des liens entre différents concepts afin de mieux comprendre les situations qui se présentent à nous. C’est également noter des patrons (*patterns*), des structures ou des régularités dans des situations réelles ou des objets symboliques (National Council of Teachers of Mathematics, 2005). Le ministère de l’Éducation, du Loisir et du Sport (MELS) (2005, 2006) précise également que le raisonnement mathématique favorise le développement du sens éthique et critique en plus de jouer un rôle fondamental dans le développement intellectuel, plus précisément au niveau de l’analyse et du traitement de données.

Très liée au raisonnement, la notion de preuve est aussi fondamentale à l’apprentissage des mathématiques, car elle permet d’établir la validité d’arguments mathématiques et de conférer un sens à différents concepts à travers l’explication logique du travail effectué (Martin et McCrone, 2001; Miyazaki, 2000). En effet, c’est à travers le développement d’habiletés et de compétences[1] en lien avec l’apprentissage de la preuve que les élèves apprennent à expliquer clairement pourquoi un énoncé est vrai (ou faux) ou encore pourquoi une solution proposée mène à une réponse correcte (McCrone et al., 2002; Miyazaki, 2000; National Council of Teachers of Mathematics, 2005). Il est donc fondamental pour les élèves de développer une « attitude de preuve » (Brousseau, 1998), d’apprendre à utiliser les mathématiques comme des outils leur permettant d’accepter ou de rejeter les propositions et les modèles qui leur sont proposés. Comme le précise Simon (2000), apprendre à faire des mathématiques, c'est entre autres apprendre à utiliser différents moyens afin de déterminer la validité mathématique d'un énoncé. De plus, les avantages associés à l’apprentissage de la preuve dépassent le cadre mathématique et permettent un fonctionnement efficace dans une multitude de situations de la vie de tous les

[1] Contrairement aux compétences, les habiletés se restreignent à un domaine précis. C’est ainsi que nous pouvons parler d’habiletés intellectuelles ou d’habiletés sociales. Les habiletés (ainsi que les connaissances) sont donc des ressources que l’élève s’approprie et utilise à dessein dans diverses situations (Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick, 2004c). C’est justement cette appropriation et cette utilisation qui manifestent la présence d’une compétence (Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2005).

jours (Miyazaki, 2000)[2]. Toutefois, malgré l'importance accordée au développement de différents types de raisonnements, plusieurs élèves se voient confrontés à des difficultés lors du développement ou de l'évaluation de preuves (Balacheff, 1987, 1999; Duval, 1991; Galbraith, 1981; Healy et Hoyles, 2000; Miyazaki, 2000; Sowder et Harel, 1998; Weber, 2001).

Dans le cadre de ce projet, nous nous intéressons au développement de preuves dans un forum électronique, outil de communication en ligne permettant des interactions entre les élèves et les enseignants. Ce choix repose sur des résultats de recherches qui ont montré que l'utilisation d'un tel outil permet le dépassement de certaines limites rencontrées dans le système scolaire (entre autres, la contrainte de temps) tout en favorisant la prise en compte de caractéristiques jugées déterminantes pour le développement de preuves (par exemple, la composante sociale).

Les chapitres qui suivent précisent, entre autres, les éléments théoriques et pratiques qui nous ont guidée tout au long de notre recherche. Le premier chapitre présente la problématique. C'est dans ce chapitre que les préoccupations qui nous ont amenée à préciser notre problème sont abordées. Le chapitre suivant, soit le chapitre 2, est axé sur les éléments théoriques en lien avec ce problème et présente les questions de recherche. La description du dispositif expérimental, notamment les questions soumises aux élèves, les méthodes de cueillette de données ainsi que la population visée, compose notre méthodologie et fait l'objet du troisième chapitre. Le chapitre 4 se centre sur les résultats qui découlent de notre expérimentation et sur l'analyse qui peut être faite de ces résultats. Enfin, quelques questionnements qui demeurent ainsi que la conclusion forment le dernier chapitre et closent notre travail.

[2] Miyazaki (2000) fait ici référence à la preuve en général et non au raisonnement déductif rigoureux associé aux démonstrations mathématiques. En effet, l'utilisation de la démonstration dans la vie de tous les jours est assez rare, sauf pour certains mathématiciens. Devant ce constat, certains vont jusqu'à remettre en question la pertinence de l'enseignement de la démonstration dans les écoles secondaires (Sierpinska, 2005). Or, bien que le développement de la démonstration ne soit pas directement réinvesti dans les situations de la vie courante, le souci de la rigueur qui lui est associé représente un élément important à développer chez les élèves.

1. PROBLÉMATIQUE

La notion de preuve a évolué au cours des siècles. Bien que la géométrie en demeure souvent le lieu emblématique à l'école, elle est tout aussi importante et nécessaire en arithmétique et en algèbre. Afin de mieux situer la place qu'occupe la preuve en mathématiques, la première partie de ce chapitre est consacrée à l'évolution qu'a connue la notion de preuve au cours des siècles.

L'apprentissage de la preuve se retrouve dans les programmes d'études de mathématiques au primaire et au secondaire. Or, l'analyse des programmes d'études dans les deuxième et troisième parties de notre problématique permet de remarquer que, bien que le développement de différents types de raisonnement, et par le fait même le développement de preuves, soit présent dans les cadres théoriques de ces programmes, peu de références concrètes sont faites quand à son apprentissage. Ce constat mène, dans un quatrième temps, à une étude des difficultés rencontrées par les élèves lors du développement et de l'évaluation de preuves. Afin d'aider les élèves à surmonter ces difficultés, il importe de connaître les éléments clés associés à la notion de preuves. La section suivante de la problématique est donc réservée à l'identification et à la description des conditions nécessaires à la production et à l'évaluation de preuves. Enfin, la problématique se termine par un regard sur les technologies de l'information et de la communication (TIC) et sur la façon dont elles peuvent favoriser le respect de ces conditions.

1.1 Regard historique sur la preuve en mathématiques

L'évolution des mathématiques et plus précisément l'évolution, dans l'histoire, du raisonnement et de la preuve en mathématiques a entraîné, entre autres, des changements considérables au niveau des éléments permettant d'identifier la validité d'une preuve. Par conséquent, cette section a pour objectif de tracer un portrait historique de la place et de la nature du raisonnement et de la preuve en mathématiques, afin de mieux comprendre le processus évolutif ayant mené aux mathématiques telles que nous les connaissons aujourd'hui.

Bien que les Grecs aient considérablement influencé les mathématiques avec, entre autres, l'introduction du raisonnement déductif, le travail des Babyloniens (III^{e} millénaire av. J.-C.) ne peut être passé sous silence (Cyr, 2006). En réalité, malgré le fait que les mathématiques babyloniennes ne présentent aucune trace de la notion de preuve, les Babyloniens semblent avoir préparé le terrain pour le développement des concepts de « théorème » et de « preuve » par les Grecs (Kleiner, 1991). Environ un demi-siècle avant notre ère, les Grecs développent la méthode axiomatique, reconnue comme leur contribution la plus importante en mathématiques. Cette méthode axiomatique s'appuie sur le raisonnement déductif et vise le développement d'une preuve basée sur des postulats clairement énoncés (Cyr, 2006).

La façon de concevoir les mathématiques, et plus précisément la preuve, est modifiée au XVI^e^ et au XVII^e^ siècles par l'introduction du symbolisme (Kleiner, 1991). Par la suite, vers la fin du XVIII^e^ siècle, lors de la Révolution française, un changement majeur au niveau social voit les mathématiciens passer d'employés de la cour à professeurs dans des institutions éducatives. Ainsi, l'enseignement aux étudiants demande aux mathématiciens un certain souci pour le détail. La formalisation claire et précise des résultats s'imposent (Cyr, 2006; Kleiner, 1991). De plus, d'un point de vue historique, il semble naturel qu'une période de réflexion et de consolidation fasse suite à une période exploratoire (Kleiner, 1991). Cette période de réflexion et de consolidation amène les mathématiciens à porter une attention particulière aux fondements de la certitude en mathématiques. Ces fondements, bien que présents antérieurement, deviennent dominants dans les développements en mathématiques au début du XIX^e^ siècle (Cyr, 2006; Kleiner, 1991). À cette époque, les nombres réels, considérés géométriquement par les mathématiciens, se retrouvent à la base des premières preuves de théorèmes en calcul infinitésimal. Puisque les propriétés propres à ces nombres ne sont pas explicitement formulées, ces preuves sont, pendant longtemps, avant tout intuitives et géométriques. Le souci de définir de façon claire et rigoureuse les nombres réels est alors soulevé par Dedekind et Weirstrass (Kleiner, 1991). À leur avis, une telle définition permettrait d'augmenter le niveau de rigueur dans les bases du calcul infinitésimal.

Les standards définissant le niveau de rigueur d'une preuve ont grandement changé au fil des siècles. Chez les Grecs, la géométrie est le lieu des théorèmes. Cette prédominance de la géométrie comme lieu de rigueur se poursuit au Moyen Âge et à la Renaissance. Ainsi, « *Mathematicians' intuition of space appeared, presumably, more trustworthy than their insight into number* » (Kleiner, 1991, p. 301). Kleiner (1991) précise qu'aux XVII^e^ et XVIII^e^ siècles, la justification à l'aide d'éléments géométriques devient de plus en plus compliquée, principalement en raison du calcul infinitésimal. L'algèbre s'impose alors comme l'outil privilégié pour la justification en mathématiques. Le XIX^{e} siècle voit l'arrivée d'un nouveau type de résultats, soit les résultats d'existence non constructifs[3]. De tels résultats peuvent sembler incomplets. L'idée selon laquelle différentes preuves prouvent à différents degrés est alors soulevée. C'est au XX^{e} siècle que s'effectuent les principaux développements au niveau de la méthode axiomatique. Tandis que le rôle de cette dernière, à l'époque des Grecs, réside principalement dans l'élaboration des fondements de la mathématique, on lui confère par la suite le rôle d'outil de recherche. Puisqu'elle permet de dépasser l'intuition, elle est alors associée à la rigueur en mathématiques.

Trois importants courants de pensée s'intéressant à la rigueur et à la preuve en mathématiques voient le jour au début du XX^{e} siècle (Cyr, 2006; Kleiner, 1991). Pour la première fois, les mathématiciens prennent officiellement position sur ce qu'est une preuve. Le premier courant, le logicisme, a pour but de fournir une base solide pour les mathématiques. Ses adeptes stipulent que tout concept mathématique peut être exprimé en termes de concepts logiques. Selon la thèse logiciste, les théorèmes sont des tautologies. Le second courant est associé au formalisme et vise à travailler non pas à partir de la réalité du travail quotidien du mathématicien, mais plutôt avec les fondements mêmes des mathématiques. La vision préconisée est alors celle d'une mathématique conçue de systèmes axiomatiques. Dernièrement, le courant intuitionniste, contrairement au courant formaliste, considère que l'analyse des systèmes axiomatiques n'est pas nécessaire. C'est plutôt l'intuition du mathématicien qui doit le guider dans son travail, sans pour autant que ce dernier n'en oublie les définitions et les procédés propres à la preuve.

À la fin du XX^{e} siècle, la signification accordée à la notion de preuve ainsi que son rôle en mathématiques sont modifiés à la suite des changements observés au niveau des fonctions qu'occupe l'ordinateur dans le travail du mathématicien. Le rôle de l'ordinateur, qui au départ réside à la fois dans l'élaboration, la vérification et la réfutation de conjectures, passe ensuite au développement de preuves[4]. Toutefois, quelques mathématiciens font preuve de réserves et remettent en doute la validité d'une preuve

---

[3] Par exemple, certains mathématiciens (dont Cauchy) prouvent l'existence de solutions d'équations différentielles sans pour autant présenter ces solutions.

[4] L'un des exemples les plus connus est sans aucun doute la démonstration du théorème des quatre couleurs où l'ordinateur est utilisé pour étudier près de 1500 cas critiques.

développée à l'ordinateur (Cyr, 2006; Kleiner, 1991). L'une des principales raisons réside dans le fait que de telles preuves ne peuvent être validées par l'humain. Elles sont tributaires des contraintes de leur programmation. Il faut alors faire entièrement confiance à la machine qui, pourtant, peut commettre des erreurs (tout comme l'humain, d'ailleurs). Une nouvelle philosophie associée à la preuve en mathématiques émerge de ces changements. La faillibilité de la preuve est reconnue, ce qui mène à la reconnaissance que la légitimité de tous les théorèmes ne peut être garantie (Kleiner, 1991). Enfin, un dernier type de preuves voit le jour au XX^{e} siècle : les preuves probabilistes.

Notre bref regard historique sur l'évolution de la preuve en mathématiques révèle que le statut de cette dernière a changé plusieurs fois durant les derniers siècles. Les Grecs l'utilisent à la fois comme un outil leur permettant de mieux connaître le monde qui les entoure et comme un moyen de convaincre les gens de la vérité d'une assertion. Au XVII^{e} siècle, le souci de convaincre les autres est remplacé par le souci de les amener à comprendre. L'utilisation d'évidences est alors utilisée pour éclairer. Les XVIII^{e} et XIX^{e} siècles sont marqués par l'accroissement de la rigueur dans le travail du mathématicien. Dans ces conditions, le rétablissement des fondements en mathématiques se fait à travers l'utilisation de la preuve. Enfin, ce sont les développements du XX^{e} siècle, plus précisément la place de plus en plus importante de l'ordinateur dans le développement de preuves, ainsi que l'arrivée des preuves probabilistes, qui soulèvent plusieurs questionnements et amènent les mathématiciens à douter de la certitude absolue pouvant être associée à une preuve ou à un théorème. Cyr (2006) résume bien cette idée en faisant appel à la notion de rigueur qui, comme la notion de preuve, a connu plusieurs définitions au fil des siècles : « il n'existe pas de rigueur absolue et immuable; cette dernière évolue selon l'époque, le contexte social et l'exigence exposée par le développement scientifique » (p. 84).

Ce survol historique de l'évolution de la preuve au fil des siècles nous amène à étudier la place du raisonnement et par le fait même la place de la preuve dans les programmes d'études de mathématiques actuels.

1.2 Regard curriculaire sur le raisonnement dans les programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick et du Québec

Cette section présente un regard curriculaire sur la place qu'occupe le raisonnement dans les programmes d'études de mathématiques. Nous nous concentrons strictement sur les programmes d'études du Nouveau-Brunswick et du Québec[5], car l'expérimentation se fait dans ces deux provinces. Le choix de travailler avec des enseignants et des élèves de deux provinces repose essentiellement sur la conjecture selon laquelle les différences qui existent entre les classes (programmes d'études distincts, utilisation de différents manuels scolaires, etc.) peuvent amener une diversité au niveau des idées émises lors des échanges. Les provinces du Québec et du Nouveau-Brunswick ont été ciblées pour deux principales raisons : les programmes d'études s'harmonisent en ce qui a trait à l'apprentissage de la preuve et la familiarité de la chercheuse avec les deux systèmes éducatifs ainsi qu'avec des personnes ressources dans chacune des provinces facilite la communication entre les différents partis[6].

1.2.1 <u>Principes directeurs</u>

Les programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick et du Québec s'orientent autour de principes directeurs qui déterminent une orientation générale pour l'enseignement des mathématiques.

Au Nouveau-Brunswick, les programmes d'études de mathématiques s'articulent autour d'orientations. Ces orientations sont regroupées en six thèmes au primaire :

- Gérer et résoudre des situations-problèmes : « Déceler des problèmes présents dans diverses situations […] construire des modèles de celles-ci et […] généraliser ce qui a été élaboré dans l'ensemble du processus » (Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick, 2000c, p. 17-18).

---

[5] Étant donné les différences qui existent entre les systèmes éducatifs du Nouveau-Brunswick et du Québec, il importe d'apporter quelques spécifications concernant le parcours des élèves dans chacune de ces provinces. Le parcours éducatif des élèves du Nouveau-Brunswick s'étend sur douze années. Les huit premières années forment le primaire tandis que les quatre dernières forment le secondaire. Lorsque les élèves ont terminé ces douze années de scolarité, ils peuvent se diriger vers des études postsecondaires de niveau collégial ou universitaire. Le parcours scolaire des élèves du Québec est différent de celui des élèves néo-brunswickois. Il ne s'étend que sur onze années d'études. Les six premières années forment le primaire et les cinq dernières forment le secondaire. Le niveau primaire est subdivisé en trois cycles tandis qu'au niveau secondaire, les deux premières années représentent un premier cycle et les trois dernières années représentent un second cycle. Lorsque les élèves ont terminé ces onze années de scolarité, ils peuvent se diriger vers des études collégiales pour ensuite poursuivre, selon le programme choisi, des études de niveau universitaire.

[6] Les raisons pour lesquelles l'expérimentation a lieu dans deux provinces plutôt qu'une sont abordées plus en détail à la section *3.2 Population*, p. 118.

- Raisonner mathématiquement : Développer une pensée articulée et autonome. C'est grâce au développement d'une telle pensée que l'élève est en mesure de juger de la qualité du travail accompli sans avoir à se référer à une forme d'autorité quelconque telle que l'enseignant, le manuel scolaire ou un élève reconnu comme « fort », etc.
- Communiquer mathématiquement : Établir des « liens entre les notions informelles, intuitives et le langage abstrait et symbolique des mathématiques » (Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick, 2000c, p. 19). Cette communication mathématique est observée à travers la lecture et la compréhension de textes mathématiques, mais également à travers l'habileté à poser des questions pertinentes et à formuler des définitions mathématiques et des généralisations.
- Établir des liens : Établir des liens de qualité « entre les différentes notions mathématiques comme entre ce contenu disciplinaire et les autres champs d'apprentissage, sans oublier ce qui appartient à la réalité quotidienne » (2006). C'est à travers l'établissement de tels liens que se construit le sens que l'élève attribue aux mathématiques.
- Valoriser les mathématiques : Pour que les élèves utilisent réellement les mathématiques, ils doivent d'abord et avant tout être convaincus de leur puissance. Il est donc important qu'ils apprennent à « apprécier le rôle significatif [des mathématiques] dans l'histoire et le développement de notre société [ainsi que] ses apports aux diverses disciplines » (2000c, p. 22).
- Développer leur confiance en leur capacité de faire des mathématiques : Peu importe les habiletés et les connaissances développées par les élèves, si ces derniers ne sont pas convaincus de leur capacité à faire des mathématiques, ils n'exploiteront pas leur plein potentiel. Il est donc important de les persuader qu'ils sont compétents à faire des mathématiques[7].

Au niveau secondaire, le Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick (MENB) élimine deux de ces orientations pour n'en conserver que quatre, soit « Gérer et résoudre des situations-problèmes », « Communiquer mathématiquement », « Raisonner mathématiquement » et « Établir des liens ».

[7] Il faut toutefois éviter de tomber dans le piège de l'effet Jourdain où « le professeur, pour éviter le débat de connaissance avec l'élève et éventuellement le constat d'échec, admet reconnaître l'indice d'une connaissance savante dans les comportements ou dans les réponses de l'élève, bien qu'elles soient en fait motivées par des causes et des significations banales » (Brousseau, 1998, p. 53).

Dans le cadre de la réforme des programmes d'études de mathématiques du Québec, le MELS (2005) a, de son côté, structuré son programme de formation de l'école québécoise (enseignement secondaire, premier et deuxième cycles) autour de trois compétences :

- Résoudre une situation-problème : « Adopter une démarche heuristique ou de découverte » dans le but de trouver une solution à une situation-problème qui n'est pas connue de l'élève (Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2005). Le processus de résolution ou le produit recherché peuvent alors être inconnus de l'élève. Cinq composantes sont associées à cette compétence : a) Décoder les éléments qui se prêtent à un traitement mathématique; b) Représenter la situation-problème par un modèle mathématique; c) Élaborer une solution mathématique; d) Valider la solution et e) Partager l'information relative à la solution.
- Déployer un raisonnement mathématique : « Formuler des conjectures, critiquer, justifier ou infirmer une proposition en faisant appel à un ensemble organisé de savoirs mathématiques » (2005). Une telle compétence nécessite chez l'élève une orientation de sa démarche et une structuration de sa pensée. Elle englobe les trois composantes suivantes : a) Former et appliquer des réseaux de concepts et de processus mathématiques; b) Établir des conjectures et c) Réaliser des démonstrations ou des preuves.
- Communiquer à l'aide du langage mathématique : Pour communiquer à l'aide du langage mathématique, l'élève doit « produire des messages en combinant le langage courant et des éléments spécifiques du langage mathématique » (2005). Cette compétence vise le développement, chez l'élève, du souci d'être clair, concis, précis et rigoureux lorsqu'il communique avec les autres. Elle regroupe trois composantes : a) Analyser une situation de communication à caractère mathématique; b) Produire un message à caractère mathématique et c) Interpréter ou transmettre des messages à caractère mathématique.

Ces trois compétences peuvent être directement associées à trois des quatre orientations énoncées dans les programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick (niveau secondaire), soit « Gérer et résoudre des situations-problèmes », « Raisonner mathématiquement » et « Communiquer mathématiquement ». L'orientation « Établir des liens » ne correspond pas à l'une des compétences énoncées par le MELS, mais elle fait tout de même partie des programmes de formation de l'école québécoise (enseignement secondaire, premier et deuxième cycles) et des références y sont faites tout au long de ces programmes. Entre autres, il est précisé que « l'enseignement de la mathématique au Québec a pour objectif d'amener l'élève à gérer une situation-problème, à raisonner, à établir des liens et à communiquer » (Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2005, p. 231). Certains buts de l'activité mathématique, soit « Interpréter la réalité » et « Prendre des décisions », reflètent aussi l'importance d'établir des liens pour les élèves du secondaire (Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2006, p. 113).

1.2.2 Types de raisonnements

Différents types de raisonnements sont présentés dans les programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick et du Québec. Par exemple, dans son programme de formation de l'école québécoise pour l'éducation préscolaire et l'enseignement primaire, le MELS (2001) mentionne l'importance de développer le raisonnement créatif chez les élèves. Dans le programme de formation de l'école québécoise pour l'enseignement secondaire (premier cycle), le raisonnement mathématique est défini comme étant un raisonnement analogique, inductif, déductif, proportionnel, algébrique, géométrique, arithmétique, probabiliste ou statistique. Le MENB (2000c, d), pour sa part, mentionne également l'importance du développement des raisonnements inductif, déductif et proportionnel chez les élèves. Par surcroît, il insiste sur l'importance des raisonnements spatial et conditionnel. À cette liste s'ajoute le raisonnement argumentatif, jugé important à la fois par le MELS et par le MENB.

Dans le but de distinguer les types de raisonnements qui sont davantage présents dans notre étude, il importe, d'emblée, de définir chacun d'entre eux. Les deux premiers types de raisonnements mis de l'avant, soit les raisonnements analogique et créatif, peuvent être considérés comme étant globaux, car les élèves doivent les employer autant au niveau primaire que secondaire, et ce peu importe le contenu mathématique en jeu.

- Raisonnement analogique : Le raisonnement analogique est associé à la reconnaissance des relations qui existent entre les objets (par exemple, les patrons, les récurrences, etc.) (English, 2004).

- Raisonnement créatif : Selon Lithner (2006), un élève démontre un raisonnement créatif s'il : 1) solutionne un problème d'une nouvelle façon ou recrée une solution déjà apprise; 2) démontre une ouverture en ce qui a trait aux différentes approches qu'il est possible d'adopter; 3) s'appuie sur des arguments mathématiques pour motiver ses choix.

Les types de raisonnements qui suivent peuvent être directement associés aux contenus de formation du programme de formation de l'école québécoise et aux domaines du programme d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick. Les élèves ont à déployer, dès le primaire, les raisonnements arithmétique, géométrique, proportionnel et statistique. Vers la septième année de scolarité, le passage du raisonnement arithmétique vers le raisonnement algébrique se fait[8]. Le raisonnement spatial, qui peut être considéré comme faisant partie du raisonnement géométrique, intervient davantage au niveau secondaire qu'au niveau primaire. La même situation peut être observée avec le raisonnement probabiliste, qui représente l'étude d'événements statistiques précis, soit les événements aléatoires. De tels événements sont étudiés au niveau secondaire.

- Raisonnement arithmétique : Le raisonnement arithmétique amène l'élève à créer des ponts entre des données connues afin de trouver la donnée inconnue (Marchand et Bednarz, 2000). C'est cette organisation d'une séquence d'opérations menant l'élève au résultat recherché qui est associée au raisonnement arithmétique.
- Raisonnement géométrique : Van Hiele (1986) définit le raisonnement géométrique à travers cinq niveaux. Le niveau 0 (reconnaissance visuelle) est associé à un raisonnement très empirique qui s'appuie sur l'apparence physique des figures. Dans le niveau 1 (analyse), les propriétés sont associées à leur figure. Ces propriétés permettent aux élèves d'analyser, mais le raisonnement présenté n'est pas ordonné. L'élève qui se trouve au niveau 2 (abstraction) est en mesure d'ordonner ces propriétés et de distinguer celles qui sont nécessaires de celles qui ne le sont pas. Le niveau 3 (déduction) est marqué par la compréhension, de la part des élèves, des éléments d'une structure déductive. À ce niveau, ils peuvent comprendre et développer une démonstration. Enfin, dans le niveau 4 (rigueur), l'élève travaille dans des systèmes axiomatiques différents.

[8] Les raisonnements arithmétique, géométrique, proportionnel et statistique sont toutefois encore utilisés par l'élève.

- Raisonnement spatial : Le raisonnement spatial comporte les processus cognitifs mobilisés pour construire et manipuler les objets, de même que les relations qui les unissent et les transformations qu'ils peuvent subir (Clements et Battista, 1992).

- Raisonnement proportionnel : Le raisonnement proportionnel amène l'élève à observer le lien existant entre des quantités ou des grandeurs. Ainsi, les concepts mathématiques et le raisonnement requis à la compréhension des notions de taux, de rapports et de proportionnalité sont associés au raisonnement proportionnel (Norton, 2005).
- Raisonnement statistique : Raisonner statistiquement, c'est « noticing, understanding, using, quantifying, explaining, and evaluating variation; thinking about the data « literature »; capturing relevant data and measurements; summarizing and representing the data; and taking account of uncertainty and data variability in decision making » (Pfannkuch et Wild, 2004).
  - Raisonnement probabiliste : Jones et al. (1997) soutiennent que le raisonnement probabiliste est basé sur quatre types de connaissances : l'ensemble des résultats possibles, la probabilité d'un événement, la comparaison de probabilités et la probabilité conditionnelle.
- Raisonnement algébrique : L'élève qui utilise un raisonnement algébrique pour résoudre un problème mobilise « la ou les quantités inconnues, par l'intermédiaire ou non d'un substitut symbolique, opérant alors sur l'inconnue comme si celle-ci était connue » (Marchand et Bednarz, 2000, p. 18). Dès lors, les inconnues doivent être considérées pendant la résolution des différents problèmes. C'est grâce au raisonnement algébrique que l'élève est en mesure de manipuler des expressions logiques ou de résoudre des équations.

Enfin, quatre autres types de raisonnement, davantage liés à la notion de preuve, sont mis de l'avant ci-dessous. Contrairement aux types de raisonnements présentés dans les pages précédentes, qui sont liés à des concepts, les raisonnements qui suivent sont plus transversaux (ils peuvent être retrouvés dans différents domaines mathématiques). Le raisonnement argumentatif est présenté le premier, car, bien qu'il soit associé à la notion de preuve, il ne requiert pas nécessairement le recours à des éléments mathématiques. Ainsi, un élève qui argumente peut utiliser un argument d'autorité pour convaincre les autres.

C'est une forme de preuve, mais peu convaincante au niveau purement mathématique. Le raisonnement inductif est habituellement exploité avant le raisonnement déductif. Enfin, le raisonnement conditionnel est introduit vers la neuvième année de scolarité.

- Raisonnement argumentatif : L'élève fait preuve de raisonnement argumentatif lorsqu'il accumule les arguments dans le but de renforcer ou d'opposer les propos déjà émis (Duval, 1990). Le poids de chaque énoncé est déterminé par son contenu sémantique. Le principal but de l'argumentation étant de convaincre les autres, un élève peut argumenter sans se préoccuper du caractère de vérité de l'affirmation originale (Balacheff, 1999; Duval, 1991)[9].
- Raisonnement inductif : Le raisonnement inductif est associé au passage du particulier au général. Ainsi, un élève qui fait preuve de raisonnement inductif se fonde sur des éléments qui sont communs à des cas distincts pour trouver des règles générales (Lemaire, 2005).
- Raisonnement déductif : Deret (1998) définit le raisonnement déductif comme « une séquence de formules (un axiome, un théorème déjà prouvé ou une hypothèse) qui consiste à effectuer des inférences à partir d'une situation donnée en suivant des « règles » (p. 57) ».
- Raisonnement conditionnel : Le raisonnement conditionnel repose sur la génération d'une conclusion à partir d'un minimum de deux prémisses (Ripoll, 2006).

Les problèmes mathématiques que nous prévoyons présenter aux élèves sont des problèmes touchant l'algèbre, ce qui implique qu'ils auront sans doute à faire appel au raisonnement algébrique et possiblement au raisonnement arithmétique lors de la résolution de ces derniers[10]. Par ailleurs, puisque le cœur de notre projet de recherche n'est pas l'algèbre, mais plutôt le développement de preuves, les raisonnements inductif, déductif et argumentatif sont aussi ciblés. Ces types de raisonnements sont abordés plus en profondeur dans le cadre théorique (voir la section *2.2.1 Distinctions relatives aux preuves*, p. 63).

[9] Le raisonnement argumentatif n'est pas défini de cette façon dans les programmes d'études du Québec et du Nouveau-Brunswick. Alors que des auteurs tels que Balacheff (1999) et Duval (1991) affirment que le raisonnement argumentatif peut nuire au développement du raisonnement déductif, le MENB et le MELS utilisent l'expression « raisonnement argumentatif » comme une formule équivalente à « raisonnement déductif » ou à « raisonnement inductif ». Étant donné que la distinction entre le raisonnement argumentatif et les autres types de raisonnement n'est pas soulignée dans les programmes d'études de mathématiques des deux provinces concernés, la précision amenée par Balacheff et Duval est retenue dans le cadre de ce travail.

[10] Les problèmes en question sont présentés à la section *3.1.1 Choix des problèmes* (p. 82).

1.2.3 Place du raisonnement dans les programmes d'études de mathématiques

L'importance du raisonnement dans les cours de mathématiques est reflétée à la fois dans les orientations des programmes de mathématiques du Nouveau-Brunswick[11] présentées à la section *1.2.1 Principes directeurs* (p. 7), orientations qui « prolongent et précisent les orientations du système scolaire et celles de la formation mathématique » (Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick, 2000d, p. 16), et dans les compétences sur la base desquelles s'organisent les programmes de formation de l'école québécoise.

Au Nouveau-Brunswick, à travers ces orientations des programmes de mathématiques du primaire et du secondaire, le MENB souligne l'importance de mettre l'accent sur le raisonnement pour que les élèves puissent :

- « expliquer leur pensée en s'appuyant sur des faits établis, des propriétés, des relations;
- justifier leurs réponses et leurs méthodes ou processus de solution;
- reconnaître et appliquer les formes déductives et inductives du raisonnement;
- comprendre et utiliser des types particuliers de raisonnement, notamment le raisonnement spatial et le raisonnement proportionnel;
- analyser des situations mathématiques en utilisant des modèles et en établissant des relations » (Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick, 2000d, p. 20; 2004c, p. 31).

Vers la fin du primaire ainsi que tout au long du secondaire, les élèves, grâce à une meilleure organisation des habiletés de raisonnement énumérées, sont en mesure de formuler et de vérifier des hypothèses. Durant ces années, les élèves apprennent à :

- « suivre des argumentations logiques;
- juger de la validité d'arguments;
- déduire des informations;
- construire des argumentations;
- élaborer des preuves d'énoncés » (Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick, 2000d, p. 20; 2004c, p. 31).

De façon plus précise, le développement d'habiletés en lien avec l'utilisation des raisonnements inductif et argumentatif apparaît vers la fin du primaire au

---

[11] Ces orientations s'inspirent des éléments présentés dans le *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (plus communément appelé *Standards*) publié par le *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM).

Nouveau-Brunswick (7e année). Le passage se fait par la suite vers l'utilisation du raisonnement déductif. Les programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick précisent que les élèves doivent, dès la fin du primaire (7e et 8e années), être en mesure de vérifier logiquement des conclusions, d'apprécier la validité d'arguments, de reconnaître les propriétés et les structures, d'élaborer des hypothèses et de construire des argumentations pertinentes et valides pour soutenir ces hypothèses (Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick, 2000c, d). Ce n'est toutefois qu'au début du secondaire, soit en 9e année, que le développement de preuves, bien qu'élémentaire, entre en jeu (2005c). Enfin, la 11e année est marquée par l'utilisation du raisonnement formel dans l'élaboration de preuves (2005e).

Au Québec, le MELS (2005) qualifie le raisonnement mathématique de « pierre angulaire de toute activité mathématique » (p. 231). Conséquemment, il met en évidence la nécessité de développer le raisonnement chez chaque élève du primaire et du secondaire. Plus précisément, au secondaire, le MELS vise à ce que l'élève puisse « structurer sa pensée en intégrant un ensemble de savoirs et leurs interrelations » (2006, p. 3). De plus, il soutient qu'il est important que les élèves apprennent à « former des conjectures, critiquer, justifier et infirmer une proposition » (2005, p. 242; 2006, p. 31). Contrairement au MENB, le MELS fait explicitement référence au développement des raisonnements inductif et déductif dans son programme de formation de l'école québécoise pour l'éducation préscolaire et l'enseignement primaire (Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2001). Le programme de formation de l'école québécoise se rapproche davantage du programme d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick lorsqu'il fait référence au recours à différents types d'arguments et de raisonnements chez les élèves au premier cycle du secondaire. En effet, le développement d'habiletés en lien avec l'utilisation des raisonnements inductif et argumentatif se fait au début du secondaire au Québec. Cette similitude entre les programmes d'études est également observable au niveau de l'introduction de la démonstration dans le parcours scolaire des élèves, introduction qui se fait au deuxième cycle du secondaire[12]. De plus, contrairement au programme de formation

---

[12] Dans le programme de formation de l'école québécoise pour le premier cycle du secondaire, l'une des composantes de la compétence 2 (« Déployer un raisonnement mathématique ») est de « Réaliser des démonstrations ou des preuves ». Or, bien que le terme « démonstration » soit utilisé, les objectifs de ce programme tendent davantage vers le développement de preuves que vers le développement de démonstration. Pour plus de détails sur éléments qui permettent de différencier une preuve d'une démonstration, voir la section *2.2.1 Distinctions relatives aux preuves* (p. 63).

pour l'éducation préscolaire et l'enseignement primaire, les éléments de contenu énoncés dans le programme s'adressant aux élèves du deuxième cycle du secondaire font mention de l'importance de l'utilisation de stratégies déductives par les élèves.

À première vue, le développement de différents types de raisonnements fait partie intégrante des programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick et du Québec. Or, un regard plus approfondi sur ces programmes permet de remarquer que, dans certains cas, les exigences spécifiques semblent peu encourager le développement des raisonnements inductif et déductif chez les élèves. En effet, une attention particulière au programme de formation de l'école québécoise (éducation préscolaire et enseignement primaire) permet de réaliser que bien que l'on semble vouloir développer les raisonnements inductif et déductif chez les élèves, aucune mention n'en est faite dans les attentes de fin de cycle ni dans les savoirs essentiels identifiés pour chacun des cycles du primaire. Ces types de raisonnements doivent être développés, mais en aucun cas ils ne sont évalués au primaire.

La situation diffère un peu dans les programmes de formation de l'école québécoise s'adressant aux élèves du secondaire. Au premier cycle du secondaire, le raisonnement déductif, lié à la preuve plutôt qu'à la démonstration, est explicitement abordé dans les attentes de fin de cycle ainsi que dans les éléments de méthode (concepts). Toutefois, bien que le développement d'habiletés en lien avec le raisonnement inductif soit introduit dans le programme du premier cycle du secondaire, ni les attentes de fin de cycle, ni les éléments de méthode ou les critères d'évaluation ne font clairement référence à ce type de raisonnement. Enfin, le programme de mathématiques s'adressant aux élèves du deuxième cycle du secondaire fait explicitement référence à une initiation au raisonnement déductif dans les éléments de méthode. De plus, dans ce programme, le MELS mentionne le développement de différents types de raisonnement (associé au développement de preuves et de démonstrations) dans les attentes de fin de cycle, les critères d'évaluation et les éléments de méthode.

D'autre part, dans tous les programmes de mathématiques néo-brunswickois du primaire, les raisonnements inductif et déductif ne sont jamais mentionnés dans les résultats d'apprentissages spécifiques ni dans les contenus d'apprentissage. Les raisonnements inductif et déductif doivent être développés chez les élèves du primaire, mais les programmes ne guident point les enseignants. Parmi l'ensemble des programmes de mathématiques néo-brunswickois du secondaire (9e à 12e année), le raisonnement inductif est absent de tous les résultats d'apprentissage spécifiques ainsi que du contenu d'apprentissage. De plus, seuls deux programmes font mention du raisonnement déductif : les programmes de 9e année et de 11e année. Différentes sections (résultats d'apprentissages spécifiques, contenu d'apprentissage, exemples d'activités d'apprentissage et questions d'évaluation) du programme s'adressant aux élèves de 9e année mentionnent le développement de preuves élémentaires (associées au raisonnement déductif par le MENB) en lien avec certaines figures géométriques. Le programme de 11e année, pour sa part, souligne d'abord l'importance pour l'enseignant d'amener les élèves à réaliser la différence entre les raisonnements inductif et déductif. Aucune piste n'est toutefois donnée pour guider les enseignants. Les résultats d'apprentissage spécifiques ainsi que le contenu d'apprentissage font ressortir l'importance de développer le raisonnement déductif à travers la démonstration de propositions et les démonstrations analytiques. Ce qui semble paradoxal, c'est le temps accordé aux enseignants pour répondre aux exigences de ce programme de mathématique :

> « L'enseignant doit faire valoir l'importance et la puissance du raisonnement déductif logique. Cependant, l'importance attribuée à l'évaluation et en termes de temps consacré à la réalisation de démonstrations ne doit pas être trop significative (maximum 2 périodes) » (Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick, 2005e, p. 46).

Bref, bien que le développement de différents types de raisonnement occupe une place importante dans les lignes directrices des programmes d'études du Québec et du Nouveau-Brunswick, il semble qu'en pratique, peu d'éléments soient présents dans les programmes d'études pour réellement guider les enseignants dans leur enseignement de la preuve. Afin d'outiller les enseignants, il apparaît donc important de se pencher sur la notion de preuve afin de mieux comprendre les différents éléments qui peuvent entrer en jeu lors du développement et de l'évaluation de preuves.

1.3 Types de preuves

À travers ses travaux, Balacheff (1987) a développé une typologie des preuves permettant de représenter l'évolution du raisonnement chez les élèves. Cette typologie est présentée de façon plus complète dans le cadre théorique, à la section *2.2.2 Typologie de* *preuves de Balacheff* (p. 65). Elle est brièvement introduite ici, car certaines des difficultés abordées dans la section suivante touchent l'un ou plusieurs de ces types de preuves.

Dans la typologie des preuves de Balacheff (1987), les preuves sont d'abord subdivisées en deux catégories : les preuves pragmatiques, qui s'appuient sur des constatations ou des mesures et les preuves intellectuelles, qui « mobilisent une signification contre une autre, une pertinence contre une autre, une rationalité contre une autre » (p, 157). Différents types de preuves, différenciés par le statut des connaissances en jeu ainsi que la nature de la rationalité sous-jacente, sont identifiés pour chacune de ces catégories. L'auteur distingue trois types de preuves pragmatiques, soit l'empirisme naïf, l'expérience cruciale et l'exemple générique. Les preuves intellectuelles, quant à elles, incluent l'expérience mentale et le calcul sur les énoncés.

Que ce soit au niveau des preuves pragmatiques ou au niveau des preuves intellectuelles, les élèves du primaire et du secondaire rencontrent des difficultés lorsqu'ils ont à développer ou à évaluer des preuves. Afin d'être en mesure de mieux les aider dans leur apprentissage, il importe d'étudier plus en profondeur ces difficultés. La section qui suit vise donc à dresser un portrait des principales difficultés rencontrées par les élèves lors du développement et de l'évaluation de preuves.

1.4 Obstacles et difficultés rencontrés lors du développement et de l'évaluation de preuves

Avant toute chose, il importe de préciser la signification accordée aux termes « difficulté », « obstacle » et « erreur ». Premièrement, selon Duroux (1983), un obstacle est une connaissance ou une conception qui a son propre domaine de validité. Ainsi, lorsque cette connaissance est utilisée à l'extérieur de ce domaine de validité, elle entraîne des réponses erronées. Ce type de connaissance résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une connaissance meilleure. Une restructuration des connaissances est donc nécessaire pour surmonter un obstacle. La notion de difficulté, pour sa part, est davantage définie par un blocage qui peut avoir lieu même si les connaissances et les habiletés nécessaires à sa résolution sont disponibles (El Bouazzaoui, 1988). Enfin, une erreur est une manifestation externe de la présence d'un obstacle ou d'une difficulté[13].

[13] Il ne faut pas confondre les termes « faute » et « erreur ». Comme le précise Pellerey (1987), l'erreur survient dans les problèmes où la recherche d'une nouvelle théorie est nécessaire. Elle est donc associée à

Plusieurs auteurs font état de difficultés et d'obstacles rencontrés par les élèves lors du développement ou de l'évaluation de preuves, et ce, autant aux niveaux primaire et secondaire qu'au niveau universitaire (Healy et Hoyles, 2000; McCrone *et al*., 2002; Miyazaki, 2000; Sowder et Harel, 1998; Weber, 2001). Apprendre à justifier et à valider leur pensée représente un changement de paradigme pour les élèves (Dreyfus, 1999). En effet, ils doivent rechercher non plus le résultat, mais bien le caractère de vérité de différents énoncés. Le développement de preuves apparaît ainsi un processus complexe qui requiert des compétences particulières, telle que l'organisation logique d'arguments, de la part des élèves.

Dans le but d'organiser notre étude des difficultés et des obstacles rencontrés par les élèves, nous nous tournons vers les travaux de Brousseau (1998). Ce dernier distingue trois types d'obstacles : les obstacles épistémologiques, les obstacles ontogéniques et les obstacles didactiques.

- Obstacles épistémologiques : Certains obstacles sont intimement liés au développement d'un concept et ne peuvent être évités. L'origine de tels obstacles est épistémologique, car ils sont directement en lien avec le développement du savoir en jeu.
- Obstacles ontogéniques : Les connaissances que possèdent les élèves de même que l'état de leur développement peuvent parfois être insuffisants ou inadaptés à l'apprentissage d'un certain savoir. Les obstacles en lien avec des limitations de l'élève lors de son développement sont dits ontogéniques.
- Obstacles didactiques : Les décisions prises par l'enseignant, les manuels scolaires utilisés, les problèmes proposés aux élèves, etc. sont tous des éléments qui peuvent influencer l'apprentissage des élèves. Les obstacles qui sont en lien avec des éléments du système éducatif sont d'origine didactique.

L'identification de la source des obstacles et des difficultés rencontrés par les élèves permet de les répertorier. Ainsi, leur origine étant identifiée, il est possible de proposer certains changements afin de rendre plus satisfaisant un point de fonctionnement du système en question. Brousseau (1998) précise cependant que certains obstacles peuvent être dus à différentes causes. Par conséquent, plusieurs systèmes en interaction peuvent être à l'origine d'un obstacle rencontré par un élève. Dans les prochaines sections, les

---

l'imagination et à la créativité. La faute, de son côté, est plutôt associée à la mémoire qui fait défaut ou à un manque d'attention.

principaux obstacles et difficultés liés à l'apprentissage de la preuve sont associés à chacune des trois origines identifiées par Brousseau.

1.4.1 <u>Origine épistémologique</u>

Certains obstacles rencontrés par les élèves lorsqu'ils se retrouvent en situation de validation font partie de la genèse de l'apprentissage de la preuve et sont au cœur même de la notion de preuve. De tels obstacles sont d'origine épistémologique. Ils jouent un rôle important, car comme le précise Brousseau (1998) : « les obstacles d'origine proprement épistémologique sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée ». En fait, Arsac et Mante (1996) soulèvent un questionnement intéressant concernant les nombreux obstacles rencontrés par les élèves : y a-t-il lieu de s'étonner de l'ensemble de ces obstacles sachant que les mathématiciens, à travers les siècles, ont rencontré des obstacles semblables? Cette idée selon laquelle les élèves passent à travers des phases qui s'apparentent à celles rencontrées par les gens qui les ont précédés dans l'histoire ne date pas d'hier, car déjà, à la fin du XIX^{e} siècle, Spencer (1866) affirmait que « *the genesis of knowledge in the individual must follow the same course as the genesis of knowledge in the race* » (p. 122). Somme toute, ce qui est important, c'est reconnaître les obstacles auxquels font face les élèves. Une telle reconnaissance représente le premier pas dans la bonne direction pour leur venir en aide (Drijvers, 2000).

Les sections qui suivent présentent trois éléments qui sont en lien avec ce type d'obstacles lors de l'apprentissage de la preuve : 1) la logique naturelle qui fait obstacle à la logique formelle; 2) la notion de preuve et 3) l'interaction sociale.

1.4.1.1 <u>Logique naturelle et logique formelle</u>

Certains obstacles sont souvent engendrés par les règles de la logique naturelle, lesquelles font obstacle à la logique formelle[14] (Arsac et Mante, 1996). Parmi les règles de la logique formelle, Arsac et al. (1992) énoncent les règles du débat mathématique :

1. « Un énoncé mathématique est soit vrai soit faux[15].

---

[14] Les auteurs utilisent également l'expression « logique mathématique ».

[15] Il y a lieu de nuancer cette règle du débat mathématique, car certains diront qu'il existe des conjectures qui ne sont pas encore prouvées en mathématique. Il est donc impossible de conclure qu'elles sont vraies ou fausses. Par ailleurs, il existe aussi des énoncés, par exemple en statistiques, qui sont vrais dans certains cas et faux dans d'autres. Ces cas qui ne confirment pas l'énoncé ne représentent toutefois pas des contre-exemples,

2. Un contre-exemple suffit pour invalider un énoncé.
3. En mathématiques, pour débattre on s'appuie sur un certain nombre de propriétés ou définitions clairement énoncées sur lesquelles on s'est mis d'accord (axiomes).
4. En mathématiques, des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver qu'il est vrai.
5. En mathématiques, une constatation sur un dessin ne suffit pas pour prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai[16] » (p. 1).

Arsac et al. (1992) regroupent, dans les règles du débat mathématique, certains éléments qui ne sont pas spécifiques de la gestion du débat. Par exemple, la règle qui précise qu'un contre-exemple suffit pour invalider un énoncé entre en jeu dans le cadre du débat, mais ne représente pas pour autant une règle qui permet de débattre. Tout ce qui est utilisé dans un débat n'est donc pas nécessairement propre aux règles du débat telles qu'énoncées par Arsac et al. La règle des propriétés mathématiques, notamment, fait référence au débat, mais les propriétés vont au-delà du besoin lié au débat. Bref, étant donné que toutes ces règles peuvent être utilisées dans un contexte autre que le débat mathématique, il peut être pertinent de les considérer davantage comme des règles illustrant un raisonnement logique (règles de logique) que des règles propres au débat.

La logique naturelle possède souvent un domaine d'efficacité suffisamment grand pour constituer un obstacle à l'apprentissage de nouvelles connaissances en lien avec la logique formelle. Au nombre de ces règles de la logique naturelle qui posent problème, nous retrouvons, entre autres, l'acceptation d'un énoncé par la population en général même si un ou deux cas ne répondent pas aux exigences de cet énoncé[17]. Pourtant, l'une des règles du débat mathématique stipule clairement qu'un contre-exemple est suffisant pour invalider

---

car ils ne permettent pas d'invalider l'énoncé. Ainsi, la prise en compte du contexte dans lequel Arsac *et al.* (1992) ont énoncé ces règles du débat mathématique est nécessaire afin de réellement comprendre le sens accordé à cette première règle. En effet, ces auteurs présentent des situations d'apprentissage développées dans le but d'amener des élèves de 11 et 12 ans à s'approprier les cinq règles du débat mathématique. Étant donné que les énoncés mathématiques présentés aux élèves de cet âge ont déjà été validés ou invalidés, ils peuvent donc être considérés comme étant vrais ou faux. Les auteurs souhaitent donc amener les élèves à réaliser que les énoncés qui leur sont présentés ne peuvent être à la fois vrais et faux.

[16] Afin de ne pas alourdir le texte, chacune des règles du débat mathématique sera dorénavant abordée comme étant la règle en lien avec : 1) le tiers exclu; 2) le contre-exemple; 3) les propriétés mathématiques; 4) les exemples ou 5) la constatation sur un dessin.

[17] La maxime populaire qui dit que l'exception fait la règle en est un bon exemple.

une proposition mathématique[18]. Il y a également lieu de soulever la règle du tiers exclu précisant qu'une proposition mathématique est soit vraie soit fausse. Les choses sont moins tranchées lorsqu'il s'agit de grandes questions de la société telles que l'avortement et l'euthanasie. Cette dichotomie (vrai/faux) au niveau des propositions mathématiques n'est pas nécessairement reflétée dans les questions quotidiennes rencontrées par les gens.

Les conceptions inadéquates des élèves posent aussi problème, car « d'une manière générale, on sait qu'il est difficile de remettre en cause ses convictions initiales » (Arsac *et al*., 1992, p. 75). À cet effet, Chazan (1993) souligne deux conceptions inadéquates en lien avec le développement de preuves[19]. La première, qui consiste à considérer ce qui est évident comme une preuve, va à l'encontre de deux règles du débat mathématique, soit celle en lien avec les exemples et celle associée à la constatation sur un dessin. Par exemple, les élèves supposent que la mesure permet de tirer des conclusions qui s'appliquent à un ensemble infini de cas. Les preuves empiriques sont donc considérées comme des preuves valides aux yeux des élèves[20]. La deuxième conception inadéquate retrouvée chez les élèves est en lien avec le fait qu'ils considèrent que la preuve déductive (plus précisément la preuve déductive géométrique) est une preuve qui s'applique à un seul et unique cas. Ainsi, ils ont de la difficulté à comprendre le caractère de généralité associé à ce type de preuves.

1.4.1.2 Définition de la notion de preuve

Certains obstacles ainsi que certaines difficultés sont également en lien avec la notion de preuve comme telle. En effet, des auteurs soulignent que plusieurs élèves et étudiants ne savent pas ce qu'est une preuve et ne sont pas en mesure de reconnaître son rôle (Dreyfus, 1999; Weber, 2001). S'inspirant des travaux de Balacheff,

---

[18] En fait, un contre-exemple suffit pour invalider un énoncé universel. En statistique, généralement, les énoncés ne sont pas universels. C'est pourquoi la situation diffère dans ce domaine, car un exemple qui ne va pas dans le sens de l'énoncé ne joue pas le rôle d'un contre-exemple et ne permet pas d'invalider l'énoncé en question. Ainsi, dans un certain sens, le raisonnement statistique rompt avec le raisonnement déductif traditionnel.

[19] Soulignons que les conceptions inadéquates des élèves peuvent à la fois être d'origine épistémologique, cognitive et didactique.

[20] Il importe de nuancer les propos de l'auteur, car toute preuve empirique n'est pas nécessairement à éviter. En réalité, dans certains cas, par exemple au début de la scolarité lorsque les élèves sont amenés à mesurer, les preuves empiriques peuvent être valides. Il est toutefois approprié de se demander si, dans un tel cas, un obstacle didactique n'est pas créé. En effet, comment justifier qu'un certain type de preuve soit accepté pour ne plus l'être par la suite? Les élèves du primaire ont-ils la maturité intellectuelle pour réellement comprendre et accepter un tel fait?

Arsac et al. (1992) la décrivent tout simplement comme « une explication acceptée par un groupe social » (p. 6). Les opinions sont toutefois diversifiées concernant les rôles et les fonctions de la preuve dans la communauté mathématique. Il est donc plus ou moins surprenant de constater que les élèves et les étudiants rencontrent un obstacle lorsque vient le temps de cibler ce rôle. Les auteurs parlent, entre autres, de prouver pour :

- comprendre (Arsac *et al.*, 1992);
- communiquer (Hanna, 2000);
- construire (Hanna, 2000);
- convaincre (Arsac *et al.*, 1992; Arsac et Mante, 1996; Balacheff, 1987; Brousseau, 1998; Martin et McCrone, 2001; Sowder et Harel, 1998);
- décider (Balacheff, 1987);
- découvrir (Hanna, 2000; Healy et Hoyles, 2000);
- établir la validité de ses idées (McCrone *et al.*, 2002; Miyazaki, 2000);
- expliquer (Chazan, 1993; Galbraith, 1981; Hanna, 2000; Healy et Hoyles, 2000; Martin et McCrone, 2001);
- explorer (Hanna, 2000);
- savoir (Balacheff, 1987);
- systématiser (Galbraith, 1981; Hanna, 2000);
- vérifier (Galbraith, 1981; Hanna, 2000; Healy et Hoyles, 2000).

En dépit de ces nombreuses fonctions associées à la preuve, Hanna souligne que le rôle de la preuve, pour les élèves, est principalement de vérifier (justifier) et d'expliquer.

1.4.1.3 <u>Interaction sociale</u>

L'interaction sociale, associée au développement de preuves par plusieurs auteurs (Balacheff, 1987; Simon, 2000; Steinbring, 2000; Voigt, 1994), présente une complexité particulière, et ce, pour différentes raisons. Premièrement, parce que c'est lors de l'interaction sociale que les univers langagiers différents ainsi que les systèmes de connaissances non unifiés se voient confrontés. Plus précisément, « la production d'une preuve oblige à la prise en compte des interlocuteurs pour finalement construire un système de validation commun, au moins localement, en référence aux propositions débattues » (Balacheff, 1987, p. 154). Des obstacles peuvent découler de ce besoin de débattre, de valider et de revalider les preuves, plus particulièrement en ce qui a trait aux preuves réalisées à l'aide d'un ordinateur et aux preuves probabilistes. En effet, ces preuves existent, mais leur validation par un humain est pratiquement impossible. Dans de tels cas, l'interaction sociale, indispensable à la preuve, se situe davantage au niveau de l'acceptation d'un tel type de preuves qu'au niveau de leur validation. À défaut de pouvoir les vérifier, il est possible de discuter de leur validité mathématique.

Deuxièmement, une difficulté peut surgir du désir de persuader l'autre, de le convaincre, car cela peut conduire les élèves à faire référence à des arguments non pertinents, voire « étrangers » au monde mathématique (Arsac *et al*., 1992; Balacheff, 1987). Ils risquent alors de recourir au raisonnement argumentatif plutôt qu'au raisonnement déductif. Selon Duval (1991), ces deux types de raisonnements diffèrent grandement. Dans l'argumentation, le poids de chaque énoncé est déterminé par son contenu sémantique. L'argumentation est donc une accumulation d'arguments servant à renforcer ou à opposer les propos déjà émis. Une telle accumulation n'est pas considérée comme un raisonnement véritable, car « elle subordonne les questions de validité aux stratégies d'action sur les représentations d'un interlocuteur » (Duval, 1990, p. 1). Dans un même ordre d'idées, Arsac et al. (1992) insistent sur le caractère de vérité associé à la preuve. Le but de l'argumentation étant de convaincre les autres, il est possible d'argumenter sans se soucier du caractère de vérité d'une assertion. Argumenter n'est donc pas prouver.

1.4.2 Origine cognitive

Le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles est caractérisé, entre autres, par une évolution du statut et de la nature des connaissances (Balacheff, 1987). En effet, comme le souligne Balacheff, « les preuves pragmatiques s'appuient sur des savoirs pratiques essentiellement engagés dans l'action, les preuves intellectuelles demandent que ces connaissances puissent être prises comme objet de réflexion ou de débat » (p. 160). Dans les sections qui suivent, nous portons une attention particulière aux connaissances des élèves qui peuvent poser problème lors de l'apprentissage de la preuve, plus particulièrement aux 1) connaissances mathématiques et aux 2) connaissances langagières.

1.4.2.1 <u>Connaissances mathématiques</u>

De nombreux auteurs (Arsac *et al*., 1992; Chazan, 1993; Dreyfus, 1999; Healy et Hoyles, 2000; Simon, 2000) soulignent le fait que plusieurs élèves n'ont pas nécessairement les moyens de reconnaître la pertinence d'une forme de raisonnement en réponse à un problème donné. Les élèves ne reconnaissent donc pas toujours la valeur d'un type de preuves par rapport à un autre et ont tendance à préférer les preuves pragmatiques (par exemple des preuves où quelques cas sont vérifiés) aux preuves intellectuelles[21] (par exemple la démonstration mathématique) (Arsac *et al*., 1992; Chazan, 1993; Dreyfus, 1999; Healy et Hoyles, 2000; Simon, 2000; Weber, 2001). Arsac et al. (1992) ont d'ailleurs remarqué que non seulement les élèves ne remettent pas en question la méthode empirique utilisée, mais ils tentent de la rendre plus précise en recalculant ou en mesurant à nouveau. En fait, pour les élèves, les données empiriques convainquent tandis que les mots et les images (mais pas l'algèbre) permettent d'expliquer (Healy et Hoyles, 2000).

Les élèves éprouvent aussi des difficultés quant à la forme que doit avoir une preuve. Ils ne connaissent pas les caractéristiques d'une explication mathématique et ne comprennent pas toujours les raisons pour lesquelles certaines propositions doivent apparaître avant d'autres dans l'écriture d'une preuve (Dreyfus, 1999; Martin et McCrone, 2001). Pour eux, la forme est souvent plus importante que le contenu. Par exemple, certains vont avoir tendance à décrire de façon chronologique toutes les étapes de leur travail plutôt que de faire des liens entre les différentes propositions énoncées (Dreyfus, 1999) tandis que d'autres vont croire que leur preuve est valide si elle contient le même nombre de pas opératoire[22] que les preuves produites par leurs pairs (Martin et McCrone, 2001). Par surcroît, certains élèves considèrent le développement de preuves comme la simple application d'algorithmes. Ils tentent de réaliser un travail qui se rapproche des exemples effectués en salle de classe. Ils raisonnent donc moins et risquent de continuer de reproduire le même format de preuves, même s'ils connaissent plus ou moins de succès (Martin et McCrone, 2001; McCrone *et al*., 2002).

[21] Pour plus de détails concernant les preuves pragmatiques et les preuves intellectuelles, voir la section *2.2.2 Typologie de preuves de Balacheff* (p. 65).

[22] Dans une preuve, un énoncé peut être une proposition d'entrée, une règle d'inférence ou une conclusion. La réunion de ces trois éléments représente un pas opératoire.

D’autre part, il arrive que les élèves se retrouvent en difficulté et ne soient pas en mesure de développer une preuve parce qu’ils ne savent tout simplement plus quoi faire pour avancer (Weber, 2001). Dreyfus (1999) explique cela par le fait que :

> « *a large part of students’ knowledge is not of the kind which supports mathematical justifications: According to Ernest, much of our students’ mathematical knowledge is tacit; and while tacit knowledge is likely to be used correctly in applications, it cannot be used explicitly in reasoning* » (p. 104).

La connaissance du contenu mathématique peut également causer certaines difficultés en influençant la construction et l’évaluation de preuves (Healy et Hoyles, 2000) ainsi que la perception que les élèves ont des preuves (Chazan, 1993). En effet, lors d’une étude effectuée auprès d’élèves de 14 et 15 ans et touchant le développement de preuves algébriques, Healy et Hoyles (2000) ont noté que certains élèves identifient une preuve, parmi plusieurs, comme étant la plus convaincante tout simplement parce qu’ils ont de la difficulté à suivre le raisonnement de l’élève. Ainsi, le fait de ne pouvoir saisir le raisonnement témoignerait de sa complexité et serait garant de sa validité.

D’autres auteurs relèvent plus précisément les difficultés en lien avec le manque de compréhension de théorèmes ou de concepts mathématiques (Dvora et Dreyfus, 2004; Weber, 2001). Ils soutiennent que la simple reconnaissance d’un phénomène mathématique n’assure pas sa compréhension. C’est pourquoi il est souvent possible d’observer, chez les élèves, une application erronée systématique d’un théorème ou d’un concept. Or, Brousseau (1983) précise qu’il ne faut pas étudier les difficultés des élèves en fonction du manque de connaissances, mais plutôt en fonction de leurs connaissances, ces dernières pouvant être inadéquates ou incomplètes. D’après Bachelard (1947), « on connaît *contre* une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites... » (p. 14). Nous pouvons donc penser qu’un manque de compréhension des théorèmes ou des concepts peut être dû à des connaissances qui posent problème à l’apprentissage de ces nouveaux concepts.

Par ailleurs, le formalisme associé à certains types de preuves (plus précisément aux démonstrations) risque de causer des difficultés chez les élèves. En effet, ce formalisme marque, entre autres, le passage vers l’utilisation de l’algèbre. Or, ce passage s’avère difficile pour les élèves, car l’utilisation de symboles littéraux est problématique (Bednarz et Dufour-Janvier, 1992, 1993; Brêchet, 2003). Certains élèves, par exemple, supposent qu'une variable ne peut prendre qu'une valeur ou que plusieurs variables prennent obligatoirement des valeurs différentes. Une telle conception des variables peut nuire à l'idée de généralité liée au développement de démonstrations. D'autres élèves éprouvent plutôt des difficultés avec la manipulation de ces variables. C'est alors que des erreurs en lien avec les quatre opérations de base, comme l'addition de tous les nombres qu'ils soient associés ou non à une variable, ou encore des erreurs de concaténation peuvent être observées (Bednarz et Dufour-Janvier, 1992). Les démonstrations connaissent également leur propre langage et l'utilisation, par exemple, de quantificateurs peut aussi créer des problèmes chez les élèves.

1.4.2.2 Connaissances langagières

Balacheff (1987) note que le passage du développement de preuves pragmatiques au développement de preuves intellectuelles requiert une évolution des caractéristiques langagières des apprenants. Des lacunes en ce qui concerne les connaissances langagières, par exemple un manque de vocabulaire, représentent une difficulté qui peut nuire aux élèves dans le développement de preuves (Dreyfus, 1999). Les répercussions peuvent alors être observées à plusieurs niveaux : difficulté à comprendre des énoncés, à formuler des résultats ou à interpréter le travail fait en salle de classe. De plus, la difficulté qu'éprouvent certains élèves à expliciter leurs conceptions les empêche parfois de réaliser que celles-ci ne sont pas suffisantes dans la situation présentée (Arsac *et al.*, 1992; Chazan, 1993).

Dans d'autres cas, c'est la confusion entre certaines expressions utilisées dans la formulation du problème ou encore la double signification associée à un terme qui devient problématique[23] (Arsac *et al.*, 1992; Arsac et Mante, 1996). Il est alors possible de parler de difficulté de nature sémantique (De Serres et Groleau, 1997). Dans un tel cas, plusieurs représentations d'un même problème peuvent être observées et les difficultés en lien avec les connaissances linguistiques risquent de masquer les difficultés en lien avec la notion de preuve. Par conséquent, lorsque les élèves éprouvent de telles difficultés, il est primordial pour l'enseignant d'intervenir afin de clarifier les termes qui sont problématiques chez les élèves (Arsac et Mante, 1996; Chazan, 1995).

[23] Par exemple, certains élèves confondent les termes « impair » et « premier ». Pour d'autres élèves, c'est le terme « exemple » qui a deux sens différents (exemple pour convaincre ou exemple pour illustrer).

1.4.3 Origine didactique

Trois principaux éléments en lien avec la dimension didactique peuvent avoir des incidences sur la compréhension des élèves en ce qui a trait à la notion de preuve : 1) les choix didactiques des enseignants; 2) le manque de temps et 3) le contrat didactique. Ces trois éléments sont présentés dans les sections qui suivent.

1.4.3.1 Choix didactiques des enseignants

Les choix didactiques des enseignants influencent grandement les preuves développées par les élèves. Notamment, le choix des problèmes peut entraîner des difficultés en ce qui a trait au développement de certains types de preuves (preuves empiriques) au détriment d'autres types (preuves intellectuelles). Par exemple, lorsque l'énoncé à prouver est trop évident, les élèves ont tendance à se limiter au développement de preuves empiriques (Arsac *et al.*, 1992; Arsac et Mante, 1996; Healy et Hoyles, 2000; Simon, 2000). Or, d'après certains auteurs (Margolinas, 1993, 2004; Mary, 1999), un deuxième élément semble davantage influencer le choix des élèves lors du développement de preuves : le projet de vérification ou le projet de preuve. Ce dernier relève de la recherche de vérité et non de la recherche de vraisemblance. Bien entendu, ce qui semble vraisemblable pour un élève n'est pas nécessairement vrai. Les élèves qui tirent des conclusions basées, par exemple, sur leurs perceptions visuelles, ne se retrouvent pas forcément dans un projet de preuve. Il est alors pertinent de parler d'obstacle et non de difficulté, car la recherche de vraisemblance, dans la vie de tous les jours, peut s'avérer adéquate pour prendre certaines décisions. Bref, il semble que ce soit davantage le projet de validation de l'élève qui détermine ses choix que le problème qui lui est proposé, car comme le précisent Arsac et al. (1992), « pour s'engager dans une démarche de preuve il faut qu'il y ait un enjeu qui nous incite à lever l'incertitude » (p. 9).

Le vocabulaire utilisé dans la formulation des problèmes peut également engendrer des difficultés chez les élèves. Dreyfus (1999) note comme exemple les termes « explique », « justifie », « prouve » et « montre que », tous utilisés dans une même activité. Selon cet auteur, la signification accordée à chaque terme varie d'une personne à une autre. Par exemple, l'enseignant qui demande à l'élève de « montrer que » recherche-t-il une preuve formelle ou un exemple pour illustrer? Ces nuances qui existent entre les significations de différents termes peuvent amener une incompréhension du problème à résoudre et donc expliquer en partie la stagnation intellectuelle observée chez des élèves.

Par ailleurs, plusieurs normes sociomathématiques pouvant faire obstacle au développement de preuves sont susceptibles d'être développées dans la salle de classe, à la fois par l'utilisation de certains manuels et par les décisions didactiques prises par l'enseignant (Dreyfus, 1999; McCrone *et al.*, 2002). Le dépassement de ces obstacles demande alors une certaine réorganisation chez les élèves. Par exemple, l'une des normes sociomathématiques qui peut être problématique réside dans le fait que les élèves rencontrent peu d'occasions favorables de mettre un sens sur les informations mathématiques. Certains faits sont présentés aux élèves sans justifications, alors que dans d'autres cas, ils peuvent émettre des affirmations sans les justifier. Les élèves ne développent alors pas une attitude de preuve. De plus, la plupart des problèmes présentés aux élèves peuvent être résolus rapidement et assez facilement. Les élèves s'attendent à ce que ce soit le cas pour tous les problèmes de mathématiques. Conséquemment, ils sont peu persévérants lorsqu'ils se retrouvent en situation de validation. Nous nous permettons d'ajouter une norme sociomathématique pouvant influencer le développement de preuves chez les élèves : la nature de la réponse. Habituellement, lors de la résolution de problème, bien que la démarche soit importante, c'est la réponse finale, pour ne pas dire le dernier nombre trouvé, qui est reconnue comme « la réponse » au problème. En effet, dans bien des cas[24], les démarches adoptées par les élèves peuvent différer, mais la réponse finale est la même. Dans le développement de preuve, la démarche adoptée par l'élève devient la réponse. Par exemple, dans le cas où les élèves doivent valider un énoncé mathématique, c'est la façon de procéder qui est importante et non pas la dernière ligne de la preuve qui, normalement, ne fait que répéter l'énoncé à prouver. Conséquemment, le développement de preuves représente une forme de problèmes particulière qui amène les élèves à changer de paradigme.

1.4.3.2 Manque de temps

Le manque de temps peut également causer des problèmes lors du développement ou de l'évaluation de preuves. Or, ce manque de temps ne représente pas un obstacle ou une difficulté en-soi, mais plutôt un élément qui peut amener certains problèmes chez les

[24] Évidemment, il existe des problèmes ouverts en mathématiques dans lesquels les élèves ont plus de latitude et où les réponses obtenues peuvent différer en fonction des contraintes que les élèves s'imposent.

élèves. En effet, toute construction cognitive requiert un certain temps (Arsac et al., 1992; Arsac et Mante, 1996; Balacheff, 1987) et l'atteinte d'un niveau supérieur de pensée pouvant être associé au développement de preuves nécessite de l'entraînement (Van Dormolen, 1977). Malheureusement, la durée nécessaire à ce type de construction est bien loin du temps accordé au développement de différents types de raisonnements en salle de classe. L'étude présentée par Martin et McCrone (2001) soulève la problématique du temps en lien avec l'enseignement et l'apprentissage de la preuve. Ces auteurs remarquent que les enseignants ont souvent tendance à répondre à leurs propres questions en salle de classe. Ils laissent peu de temps aux élèves pour réfléchir, que ce soit individuellement ou en groupe. De plus, les moments de réflexion des élèves sont souvent interrompus par des indices, des conseils ou des exemples offerts par l'enseignant. Enfin, malgré le fait que le développement de différents types de raisonnement fasse partie des cadres théoriques présentés par les programmes d'études de mathématiques du Québec et du Nouveau-Brunswick, peu de temps semble explicitement réservé à la preuve[25].

1.4.3.3 Contrat didactique

Selon Balacheff (1999), les principaux obstacles rencontrés par les élèves lors du développement de preuves sont en lien avec le contrat didactique[26] sous sa forme la plus naturelle. Il déplore que :

> « *since the teacher is the guarantor of the legitimacy and epistemological validity of what is being constructed, it follows that the student would be deprived of an authentic access to a problématique of truth and proof* » (p. 1).

C'est le dépassement de cette situation, à travers la dévolution de situations aux élèves, qui devient alors important. L'un des obstacles en lien avec le contrat didactique et auxquels se heurtent les élèves est associé à la validation se faisant par une figure d'autorité. C'est pourquoi le développement et l'évaluation de preuves nécessitent la négociation d'un nouveau contrat, différent de l'ancien où l'enseignant était reconnu comme la personne possédant le savoir ultime et représentait le moyen de validation habituel pour les élèves. En effet, le développement de différents types de raisonnements

---

[25] Voir la section *1.2.3 Place du raisonnement dans les programmes d'études de mathématiques* (p. 14) pour plus de détails.

[26] Brousseau définit le contrat didactique comme « l'ensemble des obligations réciproques et des « sanctions » que chaque partenaire de la situation didactique impose ou croit imposer, explicitement ou implicitement aux autres et celles qu'on lui impose ou qu'il croit qu'on lui impose » (Brousseau, n.d, p. 5-6).

exige des élèves qu'ils soient en mesure d'exercer une certaine forme de jugement sur le travail accompli sans avoir à se reporter à une forme d'autorité quelconque. Pourtant, les élèves sont familiarisés avec la validation par une figure d'autorité (Arsac *et al*., 1992; Chazan, 1995; Martin et McCrone, 2001; McCrone *et al*., 2002; Simon, 2000) et ce n'est que la modification du contrat didactique qui peut amener un changement à cette situation. De plus, lorsque les élèves se retrouvent en situation de développement de preuves, ils semblent d'emblée chercher à trouver ce que l'enseignant veut entendre et non ce qui représente, à leur avis, une preuve valide (Arsac *et al*., 1992; Chazan, 1993, 1995; Martin et McCrone, 2001). Ils perçoivent l'enseignant comme l'ultime figure d'autorité et comme la seule personne détenant « la bonne réponse » (Chazan, 1995).

Healy et Hoyles (2000) remarquent par ailleurs que les conceptions des élèves peuvent causer certaines difficultés, car elles diffèrent en ce qui a trait aux différents types de preuves. En effet, deux catégories distinctes se dessinent de façon importante, et ce, autant pour un problème partant d'une conjecture connue que pour un problème partant d'une conjecture qui n'est pas connue. Ces deux catégories sont : 1) les preuves qui permettent d'obtenir la meilleure note, c'est-à-dire celles prétendument préférées par les enseignants et 2) les preuves que les élèves préfèrent personnellement. Les résultats de l'étude de Healy et Hoyles (2000) démontrent que les preuves empiriques sont préférées par les élèves tandis que les démonstrations algébriques sont identifiées comme celles permettant d'obtenir le meilleur résultat. Les élèves présument que tout énoncé présentant un contenu algébrique est récompensé par leur enseignant alors que les enseignants supposent que les élèves placent davantage d'importance sur la logique des énoncés. Au contraire, les élèves oublient parfois la logique des énoncés au profit de la présence de contenu algébrique. Or, malgré cela, les auteurs soulignent que la majorité des apprenants ont conscience du fait que les preuves empiriques ne sont pas suffisantes.

Ce survol des obstacles et des difficultés rencontrées par les élèves nous amène à nous questionner sur les éléments qui ont une influence sur le développement et l'évaluation de preuves. En effet, afin d'appuyer les élèves qui éprouvent des problèmes, il importe de connaître les conditions nécessaires à la production et à l'évaluation de preuves. La section qui suit se concentre sur ces conditions.

1.5 Conditions nécessaires à la production et à l'évaluation de preuves

L'étude des difficultés rencontrées par les élèves ainsi que les nombreuses recherches portant sur le développement de différents types de raisonnements permettent de déterminer trois conditions nécessaires à la production de preuves : la condition sociale, la condition temporelle ainsi que la condition formelle (associée à la rigueur).

1.5.1 Condition sociale

Les recherches portant sur le développement du raisonnement chez les élèves, autant au niveau primaire qu'au niveau secondaire, reflètent l'importance accordée à la dimension sociale dans le développement de preuves. En effet, plusieurs auteurs envisagent le développement de connaissances mathématiques sous une perspective collective ou sociologique en le considérant comme une construction sociale. Ils reconnaissent la salle de classe comme une communauté mathématique pouvant influencer le développement d'habiletés et de connaissances chez les élèves (Balacheff, 1987; Miyazaki, 2000; Steinbring, 2000; Voigt, 1994). Hoyles (2008) ajoute que la discussion en mathématiques représente le processus par lequel l'apprentissage est construit. Une telle vision des mathématiques, où la dimension sociale est au cœur de l'apprentissage des élèves, est en lien avec la perspective socioconstructiviste qui soutient que les élèves construisent leurs connaissances sous l'influence d'un certain contexte social qui ne peut être ignoré (Brown et Campione, 1996; Cobb, 1994; Cobb et al., 1994; Palinscar, 1998; Vygotski, 1986). Selon cette perspective, l'apprentissage se fait à travers l'interaction, la négociation de sens et la collaboration entre les élèves.

La démonstration peut également être abordée sous l'angle de l'interaction sociale (Balacheff, 1987). Dans un tel cas, l'étude de la dialectique des preuves et des réfutations est de mise. Cette façon d'envisager la démonstration amène à prendre en considération la contradiction dans le développement de preuves (Balacheff, 1987; Steinbring, 2000), celle-ci étant directement liée à une attente déçue ou à une conjecture infirmée. Ainsi, il peut arriver qu'il soit nécessaire d'amener certaines modifications aux définitions ou aux lemmes, afin de contourner les contre-exemples soulevés (Lakatos, 1976). La négociation de la signification mathématique fait donc partie intégrante du processus de développement de preuves (Steinbring, 2000; Voigt, 1994).

Selon Miyazaki (2000), le type de preuves ou de démonstrations développées est souvent adapté à la communauté concernée. En effet, ce qui est considéré comme une preuve au premier cycle du secondaire ne l'est pas nécessairement par la communauté mathématique universitaire. La présence des autres est donc indispensable à la négociation de sens, propre au développement de preuves. La dimension sociale joue également un rôle important au niveau de la validation. Selon Balacheff (1987), prouver c'est s'exprimer sans contradiction formelle ou sémantique[27] et comme le souligne Simon (2000), « *the more people who consider the argument, the greater the likelihood that any flaws will be identified* » (p. 166). Ainsi, les échanges, pour ne pas dire le débat, entre les membres d'une communauté permettent à la fois de clarifier le langage utilisé, de soulever puis de dépasser des contradictions et enfin de valider l'énoncé mathématique ou la preuve proposée. La dimension sociale occupe donc une place importante à toutes les phases du développement de preuves. Il importe toutefois de noter que la présence des autres et le désire de convaincre peut conduire à l'argumentation et à ses risques.

1.5.2 Condition temporelle

Les programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick et du Québec visent le développement des raisonnements inductif et argumentatif vers l'âge de 12-13 ans chez les élèves, soit vers la fin du primaire au Nouveau-Brunswick et au début du secondaire au Québec. Le passage vers le raisonnement déductif se fait par la suite afin d'amener les élèves, vers la fin du secondaire, à développer des démonstrations mathématiques. Une volonté d'amener les élèves à faire le passage d'une mathématique pratique vers une mathématique plus théorique peut donc être observée dans ces programmes d'études. Selon Balacheff (1987), un tel passage implique une construction des connaissances et de la rationalité et toute construction cognitive requiert un certain temps. De plus, rappelons que l'atteinte d'un niveau supérieur de pensée associé au développement de preuves nécessite de la pratique (Van Dormolen, 1977). Il est donc non seulement important pour les élèves d'avoir le temps de réfléchir lors du développement d'une preuve, mais également d'avoir la chance de s'exercer en faisant plusieurs preuves

[27] Le simple fait de s'exprimer sans contradiction n'est pas suffisant pour prouver. À la base, la preuve sert à valider ou à invalider un énoncé. Or, cette définition de Balacheff ne reflète pas l'intégralité de ses travaux. En fait, Balacheff perçoit la preuve comme étant multidimensionnelle. À ses yeux, elle permet aussi de savoir, de décider, etc.

sur une longue période de temps afin d'éviter qu'une preuve ne devienne qu'un algorithme à mémoriser et à appliquer au plus grand nombre de cas possibles.

1.5.3 Condition formelle (rigueur et doute)

Selon Balacheff (1987), l'une des fonctions de la preuve est de convaincre. Or, pour convaincre, il faut être rigoureux et pour être rigoureux, il faut d'abord et avant tout douter de la rigueur utilisée (Hoyles, 2008; Van Dormolen, 1977). Ce souci de la rigueur est reflété dans le programme de formation de l'école québécoise où il est précisé que la compétence « Communiquer à l'aide du langage mathématique » vise le développement de la clarté, de la précision et de la rigueur chez les élèves qui communiquent avec les autres. D'autre part, les programmes d'études de mathématiques du MENB (2000c) précisent qu'il est important de « valoriser l'exactitude et la rigueur en mathématique » (p. 76). En plus d'être rigoureux, les élèves doivent également être en mesure d'évaluer le travail effectué. Une telle évaluation exige une remise en question des critères de validation en jeu (Balacheff, 1987). Comme le souligne le MENB, les élèves doivent développer des habiletés leur permettant de juger de la qualité de leur travail sans se référer à une forme d'autorité quelconque. Hoyles (2008) précise que dans de telles situations, il est conseillé de faire preuve de « scepticisme sain ». Il faut douter du travail réalisé, afin de le remettre en question. Cette remise en question risque alors de mener à une validation dudit travail.

Au cours des deux dernières décennies, un tournant technologique dans les programmes d'études du Nouveau-Brunswick et du Québec a pu être observé. En effet, autant au niveau primaire que secondaire, l'exploitation des TIC est préconisée. Or, l'intégration des TIC, en plus de répondre aux exigences des programmes d'études, présente également un caractère intéressant pour le développement et l'évaluation de preuves. En effet, certaines recherches démontrent que l'utilisation d'outils de communication en ligne permet la prise en compte des conditions sociale, temporelle et formelle décrites précédemment. Étant donné que pour aider les élèves à surmonter les difficultés et les obstacles qu'ils rencontrent lors du développement et de l'évaluation de preuves, il importe de les placer dans des situations où ces conditions sont considérées, il semble pertinent de se pencher sur l'intégration des TIC pour mieux comprendre l'exploitation qui en est faite dans les écoles et le potentiel de ces outils pour le développement et l'évaluation de preuves.

1.6 TIC et programmes d'études

Au Nouveau-Brunswick, en 1995, le ministre de l'Éducation et ministre d'État de la Jeunesse de l'époque précise que « l'utilisation de l'ordinateur et l'accès aux divers réseaux doivent désormais faire partie intégrante des découvertes quotidiennes des élèves » (Blaney, 1995, p. 1). Cette importance accordée à l'intégration des TIC dans les programmes d'études est observable à différents niveaux. Par exemple, dans les documents provisoires des programmes d'études de mathématiques de la 1re et de la 2e année du primaire, le MENB (2000a, b) stipule que les élèves doivent être « en mesure d'utiliser diverses technologies, de faire preuve d'une compréhension des applications technologiques, et d'appliquer les technologies appropriées à la solution de problèmes » (p.5). Dans ses versions provisoires des programmes d'études de mathématiques de la 3e à la 11e année[28], le MENB (2000c, d, 2004a, b, 2005a, b, d) énumère 13 principes directeurs dont l'un précise que « tout enseignement doit tenir compte de la présence et de l'utilisation des technologies modernes afin de préparer l'élève au monde d'aujourd'hui et, encore davantage, à celui de demain » (p. 8). Les résultats d'apprentissage transdisciplinaires[29] présents dans l'ensemble des programmes d'études de la province font également la promotion d'une utilisation judicieuse des TIC dans des situations variées afin de permettre à l'élève, entre autres, de développer certaines compétences au niveau de la communication. Les différents objectifs pour les élèves de chaque niveau en ce qui a trait à l'utilisation de la technologie sont présentés à l'annexe 1 (p. 306). Ce n'est qu'à partir de la 5e année que des exemples concrets de l'exploitation des TIC sont présentés dans les programmes d'études de mathématiques du primaire. L'une des applications suggérées est l'utilisation d'outils technologiques pour effectuer des opérations multiples sur des

---

[28] Les programmes d'études qui s'adressent aux élèves de la 12e année (niveau régulier et modifié) datent de 1992 et 1993 (1992a, b, 1993). À cette époque, le MENB plaçait moins d'importance sur l'intégration des technologies qu'il ne le fait aujourd'hui. Malgré cela, il est tout de même mentionné que « puisque les calculatrices et les ordinateurs sont des conséquences de la nouvelle technologie, l'élève doit se familiariser avec l'usage de ces nouveaux outils s'il veut devenir un(e) citoyen(e) responsable et efficace » (p. 35).

[29] Le MENB présente sept résultats d'apprentissage transdisciplinaires dans ses programmes de mathématiques : civisme, communication, technologie, développement personnel, expression artistique, langue et culture française et résolution de problèmes. Ces résultats d'apprentissage transdisciplinaires répondent aux mêmes objectifs que les compétences transversales retrouvées dans les programmes de formation de l'école québécoise.

nombres entiers, rationnels ou décimaux (par exemple, l'utilisation de la calculatrice en résolution de problèmes pour effectuer les quatre opérations de base[30]. Au secondaire, la calculatrice à affichage graphique peut être exploitée pour explorer les suites de nombres ou, vers la fin du secondaire, lors de l'étude de situations qui peuvent se traduire par des fonctions quadratiques ou lors de l'enseignement de l'optimisation[31]. Les programmes d'études du secondaire mentionnent également l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, d'un traceur de courbes ou de la calculatrice à affichage graphique pour enrichir les situations vues en salle de classe lors de la formulation de conjectures et de la modélisation de situations. Finalement, le chiffrier électronique peut être utilisé pour l'étude des cas d'annuités.

Au Québec, les programmes d'études qui guident l'ensemble des enseignants réservent également une place de choix aux TIC. En effet, dans le programme de formation de l'école québécoise de l'éducation préscolaire et de l'enseignement primaire, le MELS (2001) précise que l'intégration des TIC à l'enseignement est requise. L'exploitation des TIC figure également au sein des neuf compétences transversales identifiées dans le programme de formation de l'école québécoise, et ce, tant au niveau de l'éducation préscolaire et de l'enseignement primaire qu'au niveau secondaire (2001, 2005). Selon le MELS, cette exploitation des technologies devrait permettre aux élèves de communiquer, d'interagir et de confronter différents points de vue. De façon plus précise, le MELS présente des suggestions pour l'exploitation des technologies dans les cours de mathématiques. Ces suggestions, dans le programme de formation de l'école québécoise de l'éducation préscolaire et de l'enseignement primaire, touchent principalement la calculatrice. Après s'être familiarisés avec les fonctions usuelles de cette dernière, les élèves peuvent s'en servir pour résoudre des problèmes[32], explorer des nombres (entiers, naturels, décimaux, fractions) et des opérations. D'autres suggestions touchent l'utilisation de logiciels de dessin pour faire des solides, des figures planes, des frises et des dallages), ou pour partager une solution. Le tableur représente également un outil technologique pouvant être utilisé dans les cours de mathématiques et il s'avère utile lors de la résolution

---

[30] Dans le programme d'études de mathématiques s'adressant aux élèves de 5^e^ année, la possibilité d'additionner, de soustraire et de multiplier à l'aide de la calculatrice est évoquée. La division est ajoutée dans le programme d'études de mathématiques pour les élèves de 6^e^ année.

[31] Il n'est pas spécifié si les élèves ont également la chance de manipuler ces outils dans le but de se familiariser avec la notion d'optimisation.

[32] Bien qu'il soit précisé que la calculatrice puisse être utilisée en résolution de problèmes, ses applications concrètes ne sont pas énumérées.

de problèmes ou pour la collecte de données. Enfin, l'utilisation d'Internet est préconisée pour la recherche de données et la navigation dans des sites interactifs touchant les mathématiques. Tout au long des programmes de formation de l'école québécoise de l'éducation secondaire (1er et 2^{e} cycles), de nombreuses mentions sont faites au sujet de différents outils technologiques pouvant être utilisés pour l'apprentissage des mathématiques. Le MELS précise, entre autres, qu'il est possible d'explorer, de simuler et de représenter un plus grand nombre de situations grâce à la technologie (calculatrice, ordinateur, etc.). Par exemple, la calculatrice permet de réaliser des calculs d'opérations ou de suites d'opérations, alors que l'étude des problèmes de régularités peut se faire à l'aide d'un tableur. L'utilisation de la calculatrice à affichage graphique et du tableur-grapheur peut aussi être exploitée pour la modélisation de situations et pour l'analyse de graphiques, plus précisément l'interpolation et l'extrapolation. Les logiciels de géométrie dynamique présentent aussi des possibilités intéressantes pour les élèves, principalement au niveau de la manipulation, de l'exploration, de la découverte de propriétés et de la construction de figures géométriques. Enfin, certains logiciels de conception assistée par ordinateur peuvent être utilisés pour l'étude d'animations en trois dimensions créées à l'aide de transformations géométriques, de triangulation et de trigonométrie.

L'intégration des TIC est encouragée par les programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick et du Québec et plusieurs outils technologiques y sont mentionnés. Pourtant, aucune référence n'est faite relativement à l'exploitation d'outils de communication en ligne[33] dans les cours de mathématiques. Ils sont peu intégrés dans le monde scolaire et ce faible niveau d'intégration peut être expliqué, en partie, par le fait que ces outils n'ont pas nécessairement été conçus avec une intention didactique. Leur intégration pédagogique est donc moins apparente que celle d'autres outils technologiques tels que les logiciels de géométrie dynamique[34]. D'autre part, les environnements informatisés permettant aux gens de collaborer sont souvent conçus par des chercheurs plutôt que par des enseignants. Ces environnements étant gérés par des instances universitaires, ils sont rarement en ligne suffisamment longtemps pour permettre de

---

[33] Les outils de communication en ligne sont des ressources disponibles dans Internet et permettant la communication synchrone (en direct) ou asynchrone entre des internautes.

[34] Évidemment, certains répliqueront que les tableurs n'ont pas nécessairement été conçus avec une intention didactique et qu'ils sont pourtant intégrés en salle de classe. Nous sommes d'accord avec eux, mais nous nous permettons d'ajouter que les utilisations du tableur en mathématiques sont plus naturelles que celles du courrier électronique ou de tout autre outil de communication en ligne.

développer une réelle communauté de collaboration (Zhao et Rop, 2001). Malgré cela, les TIC créent un renouvellement dans la façon dont les gens collaborent. Elles permettent une ouverture sur le monde et représentent des outils puissants pour améliorer la communication dans le monde des affaires, en recherche et en éducation (Grant et Scott, 1996; Lunsford et Bruce, 2001; Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2005). Comme le souligne le MELS (2005), grâce à Internet « les frontières économiques, culturelles et sociales deviennent perméables. En même temps, les technologies de l'information et de la communication accélèrent les échanges, facilitant et compliquant à la fois l'accès à l'information » (p. 3).

L'exploitation d'outils de communication en ligne permet la prise en compte des conditions sociale, temporelle et formelle nécessaires au développement et à l'évaluation de preuves. Ainsi, il semble pertinent de porter une attention particulière aux types de communication assistée par ordinateur, aux outils de communication en ligne pouvant être utilisés dans les milieux scolaires ainsi qu'aux résultats qui découlent de recherches s'intéressant à l'intégration de tels outils.

1.7 Communication assistée par ordinateur

Autrefois, les gens qui collaboraient devaient le faire par téléphone, par courrier ou en personne. De nos jours, les gens reconnaissent de plus en plus le potentiel collaboratif des TIC (Laferrière et al., 2001; Lunsford et Bruce, 2001) et l'arrivée d'Internet facilite la communication assistée par ordinateur[35]. Observons un peu plus en détail le type de communication en ligne qui peut se faire ainsi que quelques-uns des outils qui permettent cette communication.

1.7.1 Communication en ligne : ouverte ou fermée?

Nous identifions deux types de communication qui peuvent être observés dans les sites Internet : la communication fermée et la communication ouverte. La communication fermée peut être qualifiée de communication à un niveau. Un message est affiché en ligne et une réponse ou un commentaire à ce message est publié. Il n'y a pas d'occasions

[35] Cette dernière, définie comme l'usage de technologies informatiques pour créer un lien entre des individus situés à différents endroits (Teles et Duxbury, 1991), s'est développée dans les années 1980, alors que les établissements d'enseignement postsecondaires se sont engagés dans cette voie en créant des cours en ligne. Il importe de noter que cette pratique est encore peu exploitée dans le monde scolaire.

d'échanges plus élaborés. Tous les sites Internet où les élèves doivent simplement répondre à des questions (pour parfois recevoir une rétroaction sur leur travail) sont des exemples de sites où une communication fermée peut être observée. Ce type de communication encourage peu la réflexion chez les apprenants, car ils n'ont pas l'occasion de demander des précisions sur certains commentaires reçus ou de répondre aux questions qui leur ont été posées. À l'opposé, la communication ouverte encourage un réel dialogue. Le nombre de questions et de réponses n'est pas limité, ce qui permet d'assister à une véritable discussion. Plusieurs ressources en ligne se tournent vers ce genre de communication et permettent aux apprenants et aux formateurs de profiter ou de participer à des services de mentorat, de faire de la recherche, de résoudre des problèmes en équipe et de collaborer. Les outils présents dans les sites Internet mathématiques qui promeuvent la communication ouverte favorisent également des échanges généraux sur les mathématiques ainsi que des discussions et des réflexions philosophiques sur des questions en lien avec les mathématiques.

1.7.2 Outils de communication en ligne

Il existe plusieurs outils de communication en ligne qui, chacun à leur façon, permettent la collaboration entre les apprenants. Cependant, il faut être réaliste. Le travail en ligne, bien qu'il puisse s'apparenter au travail en salle de classe, ne peut être le même. En réalité, demander aux élèves et aux enseignants de travailler en ligne, c'est faire le deuil de certaines informations qui ne peuvent pas être conservées dans les traces de l'outil de communication. Certains échanges sont donc perdus, car il est utopique de penser que les élèves vont écrire l'ensemble de leurs réflexions en ligne. Des échanges ont même possiblement lieu en salle de classe sans être reproduits dans l'outil de communication. Les informations échangées en salle de classe et non précisées dans l'outil de communication en ligne peuvent créer une certaine ambiguïté dans les messages publiés (surtout s'ils ne sont pas énoncés clairement en ligne). La nécessité de négocier un milieu commun se fait alors sentir avec acuité (René de Cotret, 1998; 1999). Pour négocier un tel milieu, les élèves doivent entrer dans une dialectique de formulation afin de poser des questions, reformuler, décrire de façon plus détaillée leur raisonnement, etc. Évidemment, ces mêmes arguments peuvent s'appliquer pour des situations vécues en salle de classe. La nécessité de négocier un milieu commun n'est pas seulement ressentie lorsque celui-ci est « informatisé ».

Dans le cadre de ce travail, nous nous attardons à quelques-uns de ces outils qui permettent une communication ouverte entre les apprenants. Ce choix repose sur le fait qu'un tel type de communication semble plus pertinent dans une perspective où les remises en questions, les retours en arrière et les erreurs font partie de l'apprentissage.

1.7.2.1 Courrier électronique

Le courrier électronique est sans aucun doute l'outil de communication en ligne le plus connu. Depuis quelques années, il a remplacé pour plusieurs le courrier usuel. Il permet d'envoyer des messages à des connaissances, et ce, en quelques secondes. Le courrier électronique permet la communication asynchrone entre deux ou plusieurs personnes. Bien que ce soit l'un des outils de communication en ligne les plus utilisés, il demeure que certains désavantages sont liés à son utilisation. Le principal inconvénient réside dans le fait que pour communiquer avec une personne, il faut d'abord connaître son adresse électronique. La communication se limite donc souvent à des gens qui se connaissent déjà. Conséquemment, nous pouvons parler, dans un certain sens, de communication restreinte.

1.7.2.2 Clavardage

Le clavardage permet la communication synchrone entre apprenants. Le type d'échanges permis grâce à la communication synchrone diffère d'autres formes de collaboration informatisée, car les échanges se font en direct et sur une période de temps habituellement assez courte. La rapidité des échanges permise par cet outil représente sa principale richesse. Étant donné que les différents outils de clavardage disponibles permettent aux gens d'échanger en direct, ils peuvent remplacer la communication par téléphone (qui peut souvent être coûteuse) et la communication par vidéoconférence (qui demande une bande passante particulièrement puissante pour obtenir une image vidéo de qualité). Toutefois, certains inconvénients sont associés au clavardage. Son plus grand avantage, soit la possibilité de communiquer en direct, peut également devenir le plus gros obstacle à son utilisation. En effet, pour que deux personnes clavardent, elles doivent se donner rendez-vous sur un site de clavardage et il est parfois difficile de trouver une plage horaire où tous les gens sont disponibles. Un deuxième inconvénient relié aux différents outils de clavardage est que l'information qui y est diffusée n'est pas sauvegardée (du moins, pas automatiquement). En effet, contrairement à d'autres outils de communication en ligne, les outils de clavardage ne laissent pas de traces[36]. Les utilisateurs risquent donc de perdre l'information pertinente échangée s'ils ne la sauvegardent pas.

1.7.2.3 Forum électronique

Au contraire des discussions qui ont lieu dans un outil de clavardage, les discussions dans un forum électronique (parfois appelé forum de discussion) sont asynchrones. Habituellement, le forum électronique est utilisé pour questionner les gens ou pour commenter un sujet quelconque. Tous peuvent y avoir accès et les traces des messages écrits sont conservées. Ces messages peuvent donc être consultés ultérieurement par les utilisateurs. Voilà l'un des plus grands avantages reliés au forum électronique : la possibilité de relire les messages écrits antérieurement. Un second avantage relié à l'utilisation d'un forum électronique est la facilité de repérer tout message ayant été écrit en réponse à un autre. Effectivement, les messages principaux[37] sont présentés en ordre chronologique tandis que les réponses à ces messages sont directement rattachées à ceux-ci. Par conséquent, les messages écrits en réponse à des messages principaux sont facilement repérables, car les utilisateurs n'ont pas à lire le contenu de tous les messages. Ils peuvent cibler ceux qui les intéressent et se limiter à la lecture de ces derniers.

1.7.2.4 Blogue

Blogue, weblog, carnet Web, cyberportfolio, cybercarnet, etc. sont autant de termes utilisés pour décrire un site Internet mis à jour régulièrement et présentant différents messages affichés en ordre chronologique inversé, le message le plus récent étant présenté au haut de la page. Il est similaire au forum électronique et au courrier électronique dans le sens où la communication s'y fait de façon asynchrone. La principale différence entre le blogue et le forum électronique est que le blogue est, la plupart du temps, personnel. Downes (2004) insiste sur ce caractère personnel associé au blogue et indique que « *blogs are, in their purest form, the core of what has come to be called personal publishing* » (p. 3). Toutefois, quoique les blogues prennent souvent la forme d'un journal de bord

---

[36] Par traces, nous entendons des messages écrits dans un outil de communication et gardés en mémoire par le système informatique.

[37] Premiers messages (messages initiaux) écrits dans un forum électronique. Habituellement, les utilisateurs écrivent ces messages dans le but de recevoir une réponse ou un commentaire.

personnel, un certain nombre de blogues collectifs ont vu le jour durant les dernières années. Ils sont aussi diversifiés que les utilisateurs qui les créent. Le contenu ne se limite pas à des réflexions personnelles. Un blogue peut contenir des commentaires sur divers sujets, des questionnements, des images, du son, des animations, des présentations informatisées, des liens vers différents types de documents, des hyperliens, etc. Il donne vie à de nombreuses discussions et à de nombreux débats en ligne[38]. En raison de son format, il permet aux gens d'échanger tout en gardant le fil de la conversation (tout comme le forum électronique). Selon Richardson (2004), l'arrivée du blogue a provoqué un changement dans le rôle des internautes : ils sont passés du stade de lecteur au stade d'écrivain.

1.7.2.5 Wiki

Le wiki, dérivé du mot hawaïen « wikiwiki » qui signifie « vite », est encore plus récent que le blogue. Tout comme le courrier électronique, le forum électronique et le blogue, le wiki permet la communication asynchrone entre apprenants. Plusieurs éléments font de cet outil un outil de communication possédant un certain potentiel pédagogique. Premièrement, le wiki est en ligne. Il est donc accessible par tous. Deuxièmement, il permet à plusieurs personnes de travailler sur un même document[39]. Troisièmement, il permet aux apprenants de faire des changements à distance sur un document. Ce qui est particulièrement intéressant au point de vue de la didactique, c'est que le wiki permet à l'administrateur de conserver les traces des changements qui ont été faits (effacements, ajouts, etc.).

1.7.3 Échanges en ligne et échanges en personne

La communication en ligne et la communication en personne ont été abordées par de nombreux auteurs, et ce, sous une multitude d'angles (communauté formée lors des échanges, qualité de la communication, temps « gagné » ou « perdu », apprentissages réalisés et satisfaction des gens relativement au type de collaboration vécue). Néanmoins, bien que les échanges qui ont lieu en personne et l'interaction entre les élèves soient reconnus comme un facteur pouvant favoriser l'apprentissage (Breuleux et al., 1998; R.

---

[38] Au début, le lecteur devait se connecter à un blogue pour voir si de nouveaux messages y avaient été rédigés. Actuellement, la technologie des fils RSS permet aux internautes de « s'abonner » à des sites Internet ou des mises à jour se font de façon régulière. Ainsi, dès qu'un nouveau message est publié, l'internaute reçoit un courriel lui indiquant qu'un ajout à été fait au site.

[39] Ce document est en fait une page Web en ligne.

Johnson et Johnson, 1988), peu d'études empiriques permettent de transférer ces avantages aux échanges en ligne (Ocker et Yaverbaum, 1999; Tutty et Klein, 2008). De plus, la plupart des recherches intégrant les TIC comme des outils de communication asynchrone sont faites au niveau universitaire. Les outils de communication en ligne ne sont utilisés au niveau scolaire que depuis quelques années et cette utilisation est encore peu répandue. Les recherches faites auprès des adultes peuvent néanmoins nous donner quelques pistes en ce qui a trait aux éléments propres aux échanges en ligne ou aux échanges en personne. Les sections qui suivent présentent une recension des avantages et des désavantages associés à l'intégration de ces deux types de communication pour l'enseignement et l'apprentissage.

1.7.3.1 Espace temps

De nombreux outils de communication en ligne existent et permettent aux gens de communiquer n'importe où, n'importe quand (Hiltz, 1998; Ocker et Yaverbaum, 2001). Parmi ces outils, certains permettent la communication synchrone alors que d'autres permettent la communication asynchrone. Les outils de communication synchrone donnent lieu à des échanges qui s'approchent davantage des échanges en personne. Or, bien que Curtis et Lawson (2001) reprochent le manque de spontanéité associé à la communication asynchrone, ils reconnaissent tout de même que cette forme de communication compte certains avantages qui ne sont pas forcément présents lors des échanges synchrones ou en personne. L'un des principaux avantages réside dans le format des outils de communication en ligne asynchrones. Ces outils gardent des traces des discussions anciennes et favorisent ainsi la navigation vers celles-ci. Les gens qui désirent communiquer disposent alors de plus de temps pour étoffer leurs réponses (Bodzin, 2001; Joslin et Gerlovich, 1992). Ils peuvent réfléchir davantage et appuyer leurs réflexions sur des sources d'informations pertinentes (Bodzin, 2001; Curtis et Lawson, 2001; G. Johnson, 2006; Joslin et Gerlovich, 1992; Teles et Duxbury, 1991). Les élèves, bénéficiant de plus de temps pour développer leurs réponses, voient ainsi leur rythme d'apprentissage davantage respecté (Hiltz, 1998).

Néanmoins, comme le mentionnent Hiltz (1998) et Friel (1999), cette « liberté » au niveau du temps peut causer certaines frustrations lorsqu'une réponse ou un commentaire tarde à être publié. De plus, bien que Dillenbourg et Schneider (1995) s'entendent pour dire que bénéficier de plus de temps permet aux élèves d'écrire des messages moins ambigus, ils conviennent que le coût des interactions est plus élevé avec l'écriture qu'avec la parole.

En réalité, dans un souci d'économie de temps et d'effort, les élèves risquent de réduire le nombre de sous-dialogues servant à clarifier le *social grounding*[40].

1.7.3.2 Communauté formée à travers les échanges

Dillenbourg et Schneider (1995) se sont penchés sur des travaux empiriques présentant certaines conditions gagnantes pour l'apprentissage collaboratif ainsi que sur des travaux touchant les effets cognitifs de la collaboration. Ils ont ensuite dégagé quelques éléments clés en lien avec l'apprentissage collaboratif et l'utilisation d'Internet. Selon ces auteurs, les échanges en ligne favorisent l'engagement dans un débat intellectuel où les conséquences émotives sont moins importantes que lorsque les échanges se font en personne. En effet, la distance entre les apprenants permet une participation anonyme aux échanges. Le risque de se faire juger demeure le même, mais celui de se faire reconnaître disparait (ou presque). Cette distance entre les membres d'une même communauté peut toutefois être problématique, du moins en ce qui a trait au sentiment d'appartenance à la communauté en réseau. Gulati (2008), qui s'intéresse à la pédagogie de l'apprentissage en ligne au niveau universitaire, note la complexité associée au fait de faire partie d'une communauté dans laquelle les échanges ont lieu en personne. À son avis, cette complexité s'accentue dans un environnement en ligne, particulièrement si les échanges se limitent à du texte. Hiltz (1998), pour sa part, affirme que certaines lacunes propres aux outils de communication asynchrone peuvent faire entrave au bon fonctionnement d'une communauté en ligne au niveau universitaire. Par exemple, certains membres se permettent d'être « absents » de la communauté pendant un certain temps. De telles situations alimentent la frustration des étudiants. Ces derniers sont alors moins satisfaits du processus d'interaction et de la qualité des discussions. Dans ces conditions, le sentiment de présence sociale de l'enseignant et des autres membres de la communauté s'affaiblit, ce qui risque d'entraîner une diminution dans la motivation et l'implication des apprenants. Une telle diminution peut avoir des conséquences importantes sur l'apprentissage des membres de la communauté. Ce constat rattaché au sentiment de présence sociale est en lien avec les travaux de certains auteurs qui se sont questionnés sur les raisons pour lesquelles les outils de télécommunication sont peu utilisés par les enseignants en milieu scolaire. Les résultats démontrent que l'absence de contact direct avec les gens et la nature impersonnelle des

[40] Mécanisme qui permet à un individu de continuer de croire que son partenaire a suffisamment compris ce qu'il a dit pour que le travail en lien avec la tâche à compléter puisse se poursuivre.

échanges créent de la résistance chez certains (Grant et Scott, 1996). Même avec l'appui de support visuel et auditif, il est difficile de reproduire une rencontre physique avec des collègues.

Or, certains auteurs prétendent que ce n'est pas une diminution, mais bien une augmentation de l'enthousiasme et de la motivation qui peut être observée chez les gens qui font partie d'une communauté en ligne. Par exemple, Baughman (1997) a observé les échanges en ligne qui ont eu lieu entre des élèves de 12e année de deux classes d'anglais. Des élèves américains (Mississippi) ont discuté avec des élèves sud-africains lors des premières élections qui ont suivi l'apartheid, ont comparé les traditions musicales des deux régions et ont commenté des romans. Selon cette auteure, les membres de la communauté réalisent davantage la pertinence du travail fait en classe. De plus, non seulement l'enthousiasme et la motivation des apprenants augmentent, mais ils travaillent aussi plus fort quand ils savent que leurs travaux vont se retrouver en ligne. Ils ne travaillent alors plus strictement pour eux et pour l'enseignant, mais aussi pour une multitude de gens qui risquent de lire ou de commenter leur travail.

1.7.3.3 Communication entre les membres de la communauté

Plusieurs éléments influencent la qualité des échanges qui peuvent avoir lieu entre apprenants. Entre autres, la distance qui sépare les gens, le manque de temps, le coût des déplacements et les différences culturelles peuvent faire entrave à une bonne communication. Plusieurs de ces obstacles peuvent être évités par l'exploitation des TIC (Arsenault *et al.*, 2001; Brown Yolder, 2003; Grant et Scott, 1996; Little-Reynolds et Takacs, 1998). D'autres éléments, davantage en lien avec la composition d'un groupe, peuvent aussi influencer le genre d'échanges qui ont lieu entre ses membres. L'âge des participants, le nombre de personnes formant ce groupe et les différences existant entre les membres de la communauté sont tous des facteurs pouvant influencer positivement ou négativement la collaboration entre les membres (Dillenbourg et Schneider, 1995; Tutty et Klein, 2008). Notamment, Dillenbourg et Schneider (1995) soulignent que les interactions sont provoquées par des différences de points de vue et qu'une certaine hétérogénéité est nécessaire dans un groupe si l'on désire favoriser la collaboration. Les outils de communication en ligne, qui permettent le dépassement des frontières géographiques, culturelles et professionnelles, contribuent à cette hétérogénéité des groupes (Dillenbourg et Schneider, 1995; Hiltz, 1998).

D'autres éléments soulevés par les auteurs ayant étudié la question semblent favoriser les échanges en personne au détriment des échanges en ligne. Dans un premier temps, Dillenbourg et Schneider (1995) insistent sur le fait que lors des échanges en ligne, les messages sont souvent échangés sous forme de texte plutôt qu'en personne ou en vidéos (par exemple grâce à la vidéoconférence). Or, sans l'utilisation de la vidéographie interactive, les membres de la communauté n'ont pas accès aux expressions faciales des gens avec qui ils discutent. Conséquemment, le *social grounding* nécessite plus d'efforts lors des échanges en ligne que lors des échanges en personne. Curtis et Lawson (2001) ont également soulevé le problème de l'absence de communication non verbale lors des échanges en ligne. À leur avis, l'absence de ce type de communication, présente lors des conversations en personne, peut diminuer les échanges entre les membres d'une communauté. Il importe toutefois de noter que l'utilisation d'émoticônes[41], permettant de représenter un état d'esprit ou une émotion, peut aider à remplir le rôle des expressions faciales (Dillenbourg et Schneider, 1995).

D'autre part, les étudiants sont moins satisfaits des échanges qui ont lieu en ligne que des échanges qui ont lieu en personne. Ocker et Yaverbaum (1999, 2001) se sont penchés sur cette question et ont fait une étude auprès d'étudiants inscrits au deuxième cycle en administration des affaires afin d'étudier leur niveau de satisfaction relativement aux deux types d'échanges. Les résultats démontrent que bien qu'il n'y a pas de différence significative quant à la satisfaction de la solution atteinte par le groupe, les participants sont significativement plus satisfaits du processus de collaboration et de la qualité de la discussion lorsque les échanges se font en personne plutôt qu'en ligne. Le manque de satisfaction relativement à la qualité des échanges en ligne peut être expliqué, du moins en partie, par le peu de profondeur de ces messages. Lors d'une recherche aussi auprès d'étudiants en administration des affaires, Maurino (2007) a remarqué que bien que les étudiants des classes en ligne participent davantage aux échanges que les étudiants des

[41] Le terme émoticône a été créé à partir des termes « émotion » et « icône ». Une émoticône est formée d'une série de caractères qui, lorsque regardée en penchant la tête de 90° du côté gauche, représente un visage sur lequel on peut lire une émotion. Par exemple, l'émoticône :-) est associée à un personnage souriant. Cette première version d'émoticône a mené au développement de figures, à l'image des émoticônes, qui sont déjà formées et qui présentent des visages souriants (souvent jaunes) pouvant être ajoutés aux messages. Ceux-ci peuvent être regardés sans pencher la tête.

classes traditionnels, les messages se limitent souvent à une ou deux lignes et leur contenu vise essentiellement à démontrer un accord pour un message précédemment posté ou à féliciter un collègue pour un commentaire donné. De plus, selon cette auteure, le conflit ou la contradiction d'idées est nécessaire pour apprendre. Or, les différences d'opinions sont pratiquement absentes des échanges en ligne. Les résultats de Curtis et Lawson (2001) concordent avec ceux de Maurino. En effet, ces auteurs ont réalisé une étude sur l'apprentissage collaboratif en ligne auprès d'étudiants au baccalauréat en éducation et ont observé que les étudiants remettent moins en question les propos des autres et qu'ils donnent moins d'explications (en lien avec leurs propos) lorsque les échanges ont lieu en ligne. Les auteurs soulignent que cela peut être expliqué par différents facteurs. Premièrement, au début de la recherche, les étudiants ont été mis en garde contre la façon dont peuvent être interprétés les messages qui ne contiennent que du texte. Étant donné qu'il est difficile de donner une intonation aux mots écrits[42] et que plusieurs personnes n'utilisent pas les émoticônes pour donner un ton au message, il est possible que certaines idées ne soient pas saisies comme l'émetteur le souhaite. Ce simple avertissement a pu créer une certaine inhibition chez les participants. De plus, les étudiants qui ont participé aux échanges en ligne ne se connaissaient pas. Ils n'ont donc pas pu développer le même genre de liens qui se développent normalement en salle de classe. Le manque de familiarité entre les élèves peut donc également influencer les échanges en ligne.

1.7.3.4 Apprentissage

Teles et Duxbury (1991) se sont penchés sur l'exploitation des outils de communication en ligne et reconnaissent certains avantages associés à leur utilisation en salle de classe. Entre autres, ils soulignent la facilité d'accès à l'information, l'augmentation de l'enthousiasme et de la motivation, la capacité d'échanger avec un plus grand groupe de personnes et la réalisation de la pertinence du travail fait en classe. Non seulement l'enthousiasme et la motivation des apprenants augmentent, mais ils travaillent aussi plus fort quand ils savent que leurs travaux vont se retrouver en ligne (Baughman, 1997; Hoyles, 2008). Ils sont également portés à lire et à écrire davantage lorsqu'ils

[42] Dans la communication assistée par ordinateur, une phrase ou un mot écrit en majuscules doit être considéré comme s'il était crié. Or, plusieurs personnes ne sont pas au courant de cette convention. Ainsi, certains n'utilisent pas les majuscules alors qu'ils le devraient tandis que d'autres en abusent (par exemple, en écrivant un message complet à l'aide de celle-ci).

participent activement à des échanges (Gooch, 1997). Qui plus est, les échanges qui ont débuté en classe se poursuivent souvent à l'extérieur de l'école (Benson, 1997). Les élèves ont aussi la chance de construire leurs connaissances à travers des discussions et des échanges avec leurs confrères (Benson, 1997; Teles et Duxbury, 1991). De leur côté, Ocker et Yaverbaum (1999) se sont demandé si les échanges informatisés asynchrones pouvaient être aussi efficaces pour l'apprentissage que les échanges en personne. Ils se sont rendu compte qu'il n'y a pas de différence significative entre ces deux modes de communication au niveau de l'apprentissage, de la qualité des discussions et du contenu des échanges. Ainsi, les étudiants qui participent à des échanges informatisés obtiennent les mêmes résultats que les étudiants qui échangent en personne. La satisfaction de ces derniers par rapport à la collaboration et au contenu des échanges est toutefois plus grande que celle des participants collaborant en ligne. D'autres recherches mentionnent certains des éléments pouvant créer de la frustration chez les utilisateurs d'outils de communication en ligne. Par exemple, le volume d'informations et la façon dont l'information est organisée peuvent porter à confusion (Carboni, 1999). De plus, il peut être difficile de se garder à jour si le nombre de messages affichés est trop grand (Friel, 1999).

Certains chercheurs se sont davantage concentrés sur la composition des groupes échangeant en ligne ou en personne et sur l'influence que cette composition peut avoir sur l'apprentissage. Tutty et Klein (2008) ont réalisé une expérimentation auprès de 120 futurs maîtres inscrits à un cours d'initiation à l'informatique. Ces étudiants furent séparés en six groupes et chaque groupe dut collaborer en ligne ou en personne. Les différents groupes étaient formés de trois façons : des groupes homogènes formés d'étudiants forts, des groupes homogènes formés d'étudiants faibles et des groupes hétérogènes. Les résultats démontrent que les étudiants forts faisant partie de groupes homogènes réussissent mieux en ligne alors que ceux faisant partie de groupes hétérogènes réussissent mieux lorsque les échanges ont lieu en personne (figure 1, p. 49). La situation est différente chez les étudiants faibles alors qu'ils réussissent tous mieux en personne, peu importe s'ils font partie d'un groupe homogène ou hétérogène (figure 2, p. 49).

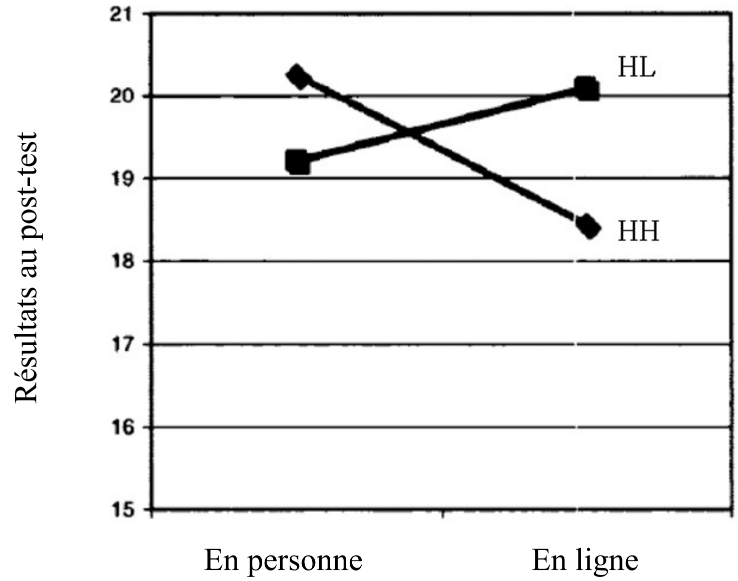


Figure 1. Résultats au post-test pour les étudiants forts faisant partie des groupes hétérogènes (HH) ou homogènes (HL) et échangeant en ligne ou en personne (traduction libre, Tutty et Klein, 2008, p. 113).

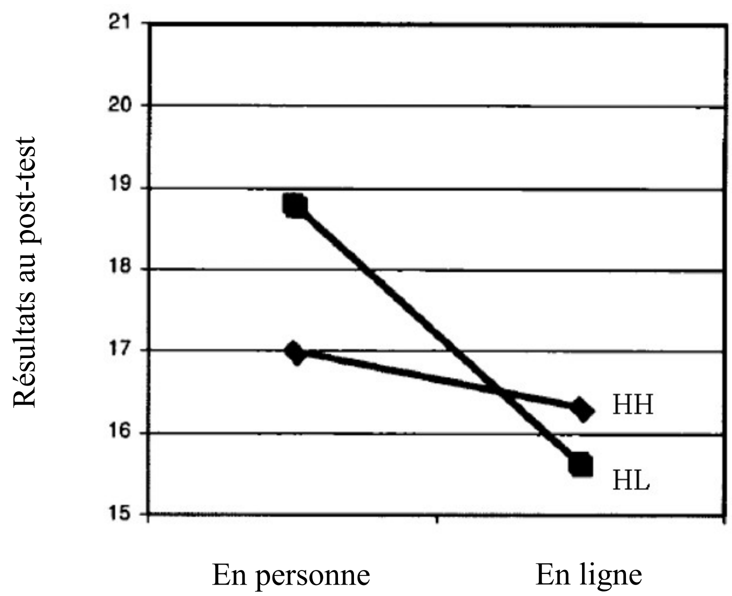


Figure 2. Résultats au post-test pour les étudiants faibles faisant partie des groupes hétérogènes (HH) ou homogènes (HL) et échangeant en ligne ou en personne (traduction libre, Tutty et Klein, 2008, p. 114).

Des analyses supplémentaires ont amené Tutty et Klein (2008) à réaliser que, de façon générale (en faisant abstraction de la composition des groupes), les participants collaborant en ligne réussissent significativement mieux sur le projet de groupe que ceux collaborant en personne. Les étudiants qui échangent en ligne posent davantage de questions à leurs collègues. Cette observation peut être interprétée de deux façons. Elle permet possiblement d'expliquer les meilleurs résultats de ce groupe, étant donné qu'ils se questionnent davantage que les étudiants qui ne sont pas en ligne. Or, il est également possible que ces étudiants posent plus de questions afin de clarifier la tâche. En effet, les messages échangés en ligne étant privé d'indices visuels (par exemple, la possibilité de pointer vers l'écran pour appuyer ses propos ou donner un exemple) le sens de ceux-ci peut être plus difficile à cerner. Les auteurs ne précisent point si les questions sont principalement en lien avec la tâche à effectuer (discussion plus « technique ») ou avec le contenu du cours. C'est pourquoi, dans ce cas-ci, le nombre élevé de questions posées peut aussi bien démontrer une participation accrue à une discussion qu'une tâche que l'on tente de clarifier. Or, bien que les résultats obtenus sur le travail de groupe soient influencés positivement par les échanges en ligne, il n'en est pas de même pour les résultats obtenus sur le post-test. En effet, les participants qui collaborent en personne obtiennent des résultats significativement plus élevés lors de l'évaluation individuelle. Les auteurs concluent donc que chaque forme d'échange doit être utilisée dans des circonstances particulières. Par exemple, à leur avis, il est préférable de permettre aux étudiants d'échanger en personne lorsque l'acquisition de faits ou de procédures est visée. En revanche, les échanges en ligne semblent plus efficaces lorsque les étudiants se retrouvent en situation de résolution de problèmes.

1.7.4 Conclusion sur les outils de communication en ligne

De nombreux auteurs se sont penchés sur les avantages et les inconvénients de l'exploitation d'outils de communication en ligne pour permettre aux apprenants d'échanger. Les différentes recherches démontrent des résultats diversifiés qui, bien souvent, se contredisent. Il est donc impossible, étant donné les circonstances, de conclure hors de tout doute que la communication assistée par ordinateur influence positivement l'apprentissage des élèves. Or, le contraire ne peut être affirmé non plus. Plusieurs variables entrent en jeu et font qu'une telle conclusion est difficile à tirer. Les activités d’apprentissage présentées aux apprenants et la composition des groupes ne sont que deux facteurs qui peuvent grandement influencer les résultats obtenus. En effet, il semble plus pertinent de permettre aux étudiants de communiquer en ligne dans certains cas alors que dans d’autres situations, les échanges en personne semblent plus bénéfiques. Si une seule conclusion doit être tirée des nombreuses recherches réalisées en lien avec la communication en ligne, c’est que ce n’est pas autant le fait d’utiliser des outils de communication en ligne qui aide les apprenants que la façon dont ceux-ci sont utilisés (Salomon, 1999). Il ne faut donc pas seulement intégrer des outils de communication en ligne parce qu’il est possible de le faire. Il est primordial d’évaluer les impacts réels de la technologie sur l’apprentissage des étudiants et des élèves, car comme le précise Sarason (1984), « *because something can be studied or developed is in itself an insufficient base for doing it however wondrous it appears to be in regard to understanding and controlling our world* » (p. 480). Tout ce qui est faisable n’est donc pas nécessairement souhaitable. Or, les résultats obtenus dans le cadre de certaines recherches nous poussent à croire qu’il est possible que l’exploitation d’outils de communication en ligne dans les cours de mathématiques permette le dépassement de certaines limites présentes dans le système scolaire tout en répondant aux conditions nécessaires au développement et à l’évaluation de preuves, soit les conditions sociale, temporelle et formelle. Bien qu’un tel dépassement ne soit pas garanti, il demeure que les avantages semblent, dans certains cas, l’emporter sur les désavantages.

Premièrement, peu de temps est réservé au développement des raisonnements argumentatif, inductif et déductif. Or, Van Dormolen (1977) précise que l’atteinte d’un niveau supérieur de pensée associé au développement de preuves requiert de la pratique. L’exploitation d’un outil de communication en ligne permet aux élèves de se retrouver en situation de validation sans exiger pour autant qu’ils soient en salle de classe. Ils peuvent également prendre plus de temps pour développer leurs arguments. La contrainte du temps peut alors être contournée grâce aux TIC (Bodzin, 2001; Curtis et Lawson, 2001; G. Johnson, 2006; Joslin et Gerlovich, 1992; Teles et Duxbury, 1991).

En second lieu, le passage d’une mathématique pratique vers une mathématique plus théorique est associé aux situations de validation qui permettent aux élèves de consolider leur certitude face à des résultats mathématiques à travers la construction de systèmes de preuves. Cette construction peut se faire, entre autres, à travers l'argumentation et le débat. La part importante jouée par ces deux éléments dans les situations de validation reflète la place de la dimension sociale soulevée par plusieurs auteurs dans le développement de preuves (Balacheff, 1987; Miyazaki, 2000; Simon, 2000; Steinbring, 2000; Voigt, 1994). Ainsi, le développement et l'exploitation d'une communauté mathématique plus large permettant le dépassement des limites physiques de la salle de classe sont importants. Une telle communauté peut être retrouvée en ligne, alors que la communauté apprenante se voit élargie et que des échanges peuvent avoir lieu entre apprenants, professionnels de l'enseignement, amateurs et experts, qu'ils oeuvrent ou non dans le même établissement (Hiltz, 1998; Koufman-Frederick et al., 1999; Ocker et Yaverbaum, 2001; Vieillard-Baron, 2008).

Troisièmement, les élèves qui se retrouvent en situation de validation doivent convaincre les autres (Balacheff, 1987). Or, ce besoin de convaincre peut entraîner les élèves à utiliser l'argumentation, ce qui n'est pas souhaité. Il est donc important pour les élèves non seulement de convaincre les autres, mais également d'être rigoureux dans leur raisonnement (Van Dormolen, 1977). Pour devenir plus rigoureux, ils doivent d'abord douter de la rigueur qu'ils utilisent dans leur travail (Hoyles, 2008; Van Dormolen, 1977). Ils doivent donc être en mesure de juger de la qualité du travail accompli sans avoir à se reporter à une forme d'autorité. L'utilisation d'un outil de communication en ligne est pertinente dans le sens où le statut des participants ne peut pas être établi lorsque ceux-ci se retrouvent en ligne (Dillenbourg et Schneider, 1995). Le poids que peut prendre un argument donné par un élève jugé « fort » en salle de classe perd de l'ampleur dans l'outil de communication, à condition que les autres élèves ne soient pas en mesure de reconnaître l'auteur du message. Ainsi, cet argument gagne sa force à travers la validation que ses pairs en font et non à travers la réputation que l'élève s'est bâtie en salle de classe. La validation ne se fait donc pas nécessairement par une figure d'autorité. De plus, les élèves tendent à être plus rigoureux lorsqu'ils sont conscients que leur travail sera lu par plusieurs personnes, ce qui est fréquemment le cas dans un outil de communication en ligne (Baughman, 1997; Downes, 2004).

1.8 Questionnements

Plusieurs éléments ressortent de la problématique. Entre autres, le fait que le développement de différents types de raisonnements soit présent dans les programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick et du Québec. Or, les élèves font face à plusieurs difficultés en lien avec le développement et l'évaluation de preuves, processus principalement associés aux raisonnements inductif et déductif. Une question fait alors surface : comment aider les élèves dans le développement et l'évaluation de preuves? Afin de répondre à cette question, il importe de poser un regard plus approfondi sur ce qui se fait et surtout sur ce qui peut se faire en matière de développement de preuves chez les élèves.

Les nombreuses recherches portant sur l'intégration des TIC en salle de classe nous permettent de supposer qu'une approche favorisant l'exploitation des TIC, plus précisément l'utilisation d'outils de communication en ligne, présente des avenues intéressantes pour exploiter le développement de preuves. Ainsi, dans le cadre de ce projet de recherche, nous nous intéressons à la fois au développement de preuves et à l'intégration des TIC en salle de classe. Plus précisément, nous nous intéressons aux preuves que les élèves développent lorsqu'ils se retrouvent en situation de validation dans un outil de communication en ligne. Comment définir ces preuves? Celles développées en ligne sont-elles du même type que celles développées en salle de classe? En quoi se ressemblent-elles? En quoi diffèrent-elles? Voilà des questions préliminaires qui nous guideront et qui vont nous mener aux questions de recherche présentées à la section *2.4 Questions de recherche* (p. 75). C'est en nous appuyant sur les éléments développés dans notre cadre théorique que nous préciserons ces dernières.

2. CADRE THÉORIQUE

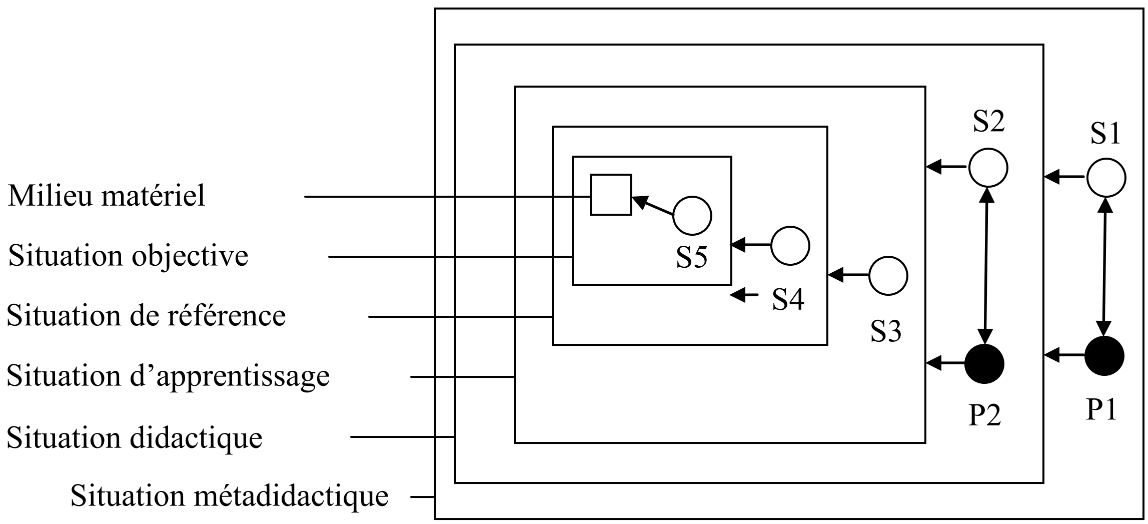
Plusieurs éléments théoriques nécessaires à l'étude des preuves développées par les élèves lorsqu'ils se retrouvent en situation de validation, que ce soit dans un outil de communication en ligne ou non, sont présentés dans notre cadre théorique. Premièrement, l'identification ainsi que la description des différents types de situations (action, formulation, validation et institutionnalisation) dans lesquels un élève peut se retrouver se fait grâce à la théorie des situations didactiques (TSD) de Brousseau (1986b, 1988, 1995, 1998, n.d.). Cette théorie nous permet, entre autres, d'identifier clairement les caractéristiques des situations de validation, situations se trouvant au cœur de notre projet de recherche. En second lieu, nous nous penchons sur les travaux d'Arsac et al. (1992), Balacheff (1999) et Duval (1991) afin de mieux comprendre certaines différences pouvant exister entre les raisonnements argumentatif, inductif et déductif. Enfin, ce sont les typologies de preuves de Balacheff (1999) et de Miyazaki (2000) ainsi que la grille permettant de caractériser la validation développée par Mary (1999) qui servent de base à notre grille d'analyse. Les dernières sections de notre cadre théorique présentent respectivement le champ mathématique exploité, soit l'algèbre, nos questions de recherche ainsi que la pertinence et l'originalité de notre projet.

Afin de situer le lecteur par rapport à nos intérêts de recherche précis, il importe de préciser que deux préoccupations principales se trouvent au cœur de notre projet de recherche. La première se situe au niveau du rôle que peut jouer le forum électronique en ce qui a trait aux habiletés de validation algébrique. La seconde est en lien avec l'évaluation de preuves et l'influence que peut avoir l'exploitation d'un forum électronique sur celle-ci.

2.1 Théorie des situations didactiques

Brousseau (1986b, 1988, 1995, 1998, n.d.) modélise le milieu didactique en tenant compte de la particularité des interactions qui peuvent être vécues en salle de classe. Ces interactions sont souvent perçues comme un jeu didactique où deux joueurs entrent en relation : le maître et l'élève. Or, selon Brousseau (1986a), la situation didactique dépasse la simple communication ou encore la simple interaction sociale. Afin de réellement modéliser la situation didactique, il est nécessaire de considérer un système plus vaste dans lequel intervient le milieu. Ce milieu est défini comme « le système antagoniste du système enseigné, ou plutôt, précédemment enseigné » (p. 89). Il est reconnu à la fois comme ce qui peut agir sur l'élève et ce sur quoi l'élève agit (Brousseau, 1998). Il est donc possible (mais pas nécessaire) pour l'enseignant ou pour d'autres élèves de faire partie du milieu. Brousseau considère donc que trois éléments entrent en relation dans le jeu didactique : l'enseignant, l'élève et le milieu.

Le modèle de structuration du milieu didactique proposé par Brousseau présente cinq milieux qui s'emboîtent et avec lesquels l'élève peut interagir (figure 3, p. 55).



Le sujet apprenant ○ Le professeur ●

S1 sujet universel
S2 élève générique
S3 sujet de l'apprentissage
S4 sujet agissant
S5 secteurs objectifs

P1 Professeur préparant son cours
P2 Professeur enseignant (agit ou observe)

(Brousseau, 1998, p. 326)

Figure 3. Modèle de structuration du milieu didactique de Brousseau.

Le milieu matériel représente les situations qui sont proposées aux élèves. La situation objective englobe ce milieu matériel ainsi que les secteurs objectifs (S5), non pas représentés par l'élève, mais plutôt par les sujets dont on parle dans un problème. Dans la situation de référence, l'élève se retrouve devant le milieu objectif qui lui est proposé. Ce milieu est composé de « l'ensemble des objets et relations qui ne dépendent ni de ses actions et connaissances, ni de celles du professeur » (Brousseau, n.d., p. 22). La situation de référence est donc en lien avec les représentations initiales de l'élève, car c'est à ce moment qu'il se retrouve en contact avec le problème proposé. Brousseau qualifie alors le sujet (S4) de connaissant et agissant. Toutefois, l'auteur précise qu'il peut être difficile d'expliquer les opérations mentales et cognitives de l'élève lorsqu'il se retrouve dans la situation objective. La situation d'apprentissage présente le sujet épistémique (S3) qui tente de comprendre le problème en considérant ses propres actions (les actions de S4). Dans ces conditions, il y a dévolution, c'est-à-dire que l'élève est responsable de son apprentissage et résout des problèmes sans l'aide du professeur[43]. Ainsi, ce dernier vise à ce que « l'action de l'élève ne soit produite et justifiée que par les nécessités du milieu et par ses connaissances, et non par l'interprétation des procédés didactiques du professeur » (Brousseau, 2003, p. 5). Ce milieu représente le dernier niveau adidactique. La situation didactique, également reconnue comme le niveau d'intervention didactique, laisse apparaître le professeur acteur (P2). Il importe de noter que cette apparition du professeur dans la situation didactique ne signifie pas pour autant que celui-ci soit absent des autres situations. Son rôle n'a tout simplement pas été précisé par Brousseau[44]. L'élève (S2) se retrouve dans une position que l'auteur considère comme plus classique, soit celle où il apprend du maître. La situation métadidactique, de son côté, fait référence au praticien (P1) qui réfléchit à sa pratique enseignante ou à ses rapports avec ses élèves en préparant son cours. Le sujet S1 représente un élève qui « regarde une situation d'enseignement de l'extérieur » (Brousseau, 1998, p. 326). Le développement d'activités par l'enseignant ainsi que l'analyse de la didactique font partie de la situation métadidactique.

2.1.1 Types de situations

Dans la TSD, l'élève se retrouve en situation de jeu et doit, en fonction des rétroactions que lui envoie le milieu, modifier certaines actions, certaines décisions afin de trouver la solution optimale au problème posé, celle-ci lui étant inconnue au début de l'activité. Dans le cadre de notre recherche, c'est principalement l'étude des jeux de l'élève avec les milieux adidactiques qui nous intéresse.

---

[43] Nous conservons ici le terme « professeur » afin de respecter la terminologie utilisée par Brousseau. Ce terme pourrait être remplacé par « enseignant » sans pour autant modifier le sens du modèle de structuration du milieu didactique.

[44] Ce travail a toutefois été fait par Margolinas (1995). Le modèle modifié proposé par cette auteure suit la présentation de celui de Brousseau.

Brousseau (1998) définit le terme situation comme étant « l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve l'élève, les relations qui l'unissent à son milieu, l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution » (Brousseau, 1998, p. 279). Il utilise également les termes « interactions » et « dialectiques » lorsqu'il parle des différents types de situations. Dans la TSD, Brousseau présente trois types de situations adidactiques, situations où « le maître a réussi à faire disparaître sa volonté, ses interventions, en tant que renseignements déterminants de ce que l'élève va faire » (p. 311) : les situations d'action, les situations de formulation et les situations de validation. L'auteur reconnaît également l'existence d'un quatrième type de situations, les situations d'institutionnalisation. Celles-ci sont reconnues comme des situations didactiques plutôt qu'adidactiques, car on y retrouve manifestement l'intention d'enseigner[45].

2.1.1.1 Situations d'action

Les situations d'action sont « considérées comme la fonction première du savoir » (Institut universitaire de formation des maîtres, n.d.). L'annexe 2 (p. 307) présente le modèle général de l'action (sans interlocuteur) tel que conçu par Brousseau. Ce modèle reflète les différents éléments qui entrent en jeu lorsque l'élève se retrouve dans une situation d'action, situation où il prend des décisions en vue de l'action. Ces décisions sont souvent basées sur des savoirs implicites ou plus ou moins construits. À la suite de cette prise de décision, l'élève pose une action sur le milieu. C'est à travers la recherche de stratégies optimales que se font les prises de décisions et c'est à travers le processus de prises de décisions que se construisent des régularités, des schémas et des modèles d'action. Brousseau précise que les situations d'action devraient respecter les propriétés suivantes :

- Le milieu doit être adidactique.
- Lors de la prise de décision, l'élève doit, consciemment, être en mesure de faire un choix parmi plusieurs possibilités.
- La situation présentée doit permettre à l'élève de perdre et de gagner. L'élève doit connaître l'état final gagnant et doit être en mesure de l'atteindre.
- L'élève doit comprendre les règles du jeu sans toutefois être en mesure de cibler une stratégie gagnante dès le départ.

[45] L'intention d'enseigner est présente dans les situations adidactiques mais on cherche à la faire disparaître pour que l'élève procède de son propre mouvement.

- Le passage de la stratégie de base à la stratégie optimale se fait nécessairement par l'exploitation de la connaissance visée.
- Les rétroactions du milieu adidactique doivent être pertinentes dans le sens où elles permettent à l'élève de construire ses connaissances.

Est-il possible qu'une stratégie optimale ne passe pas nécessairement par l'exploitation de la connaissance visée par l'enseignant, étant donné que ce dernier ne peut pas toujours prédire les actions de ses élèves? À notre avis, si la stratégie utilisée par ce dernier n'est pas celle visée par l'enseignant, il y a lieu de se questionner sur l'effectivité du milieu construit. Bref, ces propriétés représentent davantage les conditions idéales qui devraient être satisfaites dans une situation d'action plutôt que celles qui sont nécessaires à la « survie » (ou devrions-nous plutôt dire à la vie) d'un tel type de situation. Signalons enfin que les interactions qui peuvent être observées lors des situations d'action se limitent à deux types : les interactions « d'un codage si facile par rapport à l'action qu'il ne jouera aucun rôle dans le jeu » (Brousseau, 1986a, p. 95) ainsi que les échanges anodins, n'étant pas en lien avec la résolution du problème.

2.1.1.2 <u>Situations de formulation</u>

Les situations de formulation englobent toute communication d'informations. On parle alors « d'échanges d'informations codées dans un langage » (Brousseau, 1986a, p. 95), tels les ordres, les questions et les messages informatifs. Ces messages sont échangés entre un émetteur et un récepteur et sont censés modifier l'incertitude du milieu[46] et parfois même son état. Ils permettent de donner un sens à la situation d'action. Il importe toutefois de noter que le but de l'émetteur, dans les situations de formulation, n'est pas d'agir sur le récepteur, mais plutôt « d'agir par son intermédiaire sur le dispositif milieu » (Brousseau, 1986a, p. 104).

Dans les situations de formulation, l'élève prend conscience des stratégies mises en œuvre dans les situations d'action. La formulation des descriptions et des modèles construits dans les situations d'action fait également partie de ce type de situation. L'élève utilise alors la langue naturelle ou un langage plus formel pour s'exprimer. Il peut

[46] Un milieu est incertain lorsqu'il présente des éléments qui ne sont pas clairs pour l'élève (par exemple, lors d'un échange, si un élève ne comprend pas la stratégie adoptée par un autre élève pour résoudre un problème, le milieu devient incertain). L'élève peut alors être amené à poser des questions afin de modifier l'incertitude du milieu.

également avoir recours à des dessins, des graphes, etc. Selon Brousseau, l'un des meilleurs résultats pédagogiques pouvant être retirés de ce type de situation est l'utilisation correcte du langage mathématique. Pour qu'une telle utilisation du langage mathématique ait lieu, trois éléments sont cruciaux :

- le jeu avec le milieu doit encourager, de la part de l'élève, l'utilisation d'un discours riche et pertinent;
- le jeu avec le milieu doit nécessiter un emploi fréquent du langage mathématique;
- les messages produits doivent pouvoir être analysés.

Le schéma de la communication tel que conçu par Brousseau est présenté à l'annexe 3 (p. 308).

2.1.1.3 <u>Situations de validation</u>

Dès le moment où l'élève exprime explicitement une affirmation de validité, le passage se fait des situations de formulation aux situations de validation. Dans ce type de situation, l'élève élabore un système de preuve afin de consolider sa certitude par rapport à des résultats mathématiques. Brousseau (1986a) fait alors référence à des « échanges de jugement » (p. 95). Ces échanges peuvent porter sur la validité sémantique, syntaxique ou pragmatique des énoncés en jeu. Les informations échangées peuvent prendre le statut de preuves, de démonstrations, d'axiomes ou encore de définitions. Tout comme dans la situation de formulation, nous retrouvons encore un émetteur et un récepteur, mais contrairement à la situation rencontrée lors de la dialectique de la communication, les joueurs en jeu « s'affrontent à propos d'un objet d'étude composé des messages et descriptions que l'élève a produits d'une part, et du milieu adidactique qui sert de référent à ces messages d'autre part »[47] (Brousseau, 1986a, p. 108) (annexe 4, p. 309). Ce type de situation est essentiel à l'institutionnalisation d'une théorie, car pour que celle-ci soit identifiée comme un savoir, elle doit d'abord avoir été utilisée dans des échanges entre les élèves afin de la prouver ou de la rejeter.

---

[47] Dans ces conditions, est-il possible pour un élève seul de se retrouver en situation de validation ou doit-il toujours y avoir un deuxième joueur avec qui il peut débattre? Selon Brousseau et Warfield (1999), grâce aux situations de validation, il est possible pour l'élève de se construire un « interlocuteur intérieur » avec lequel il peut débattre. De même, Mary (1999) propose d'autres types de validation où la présence d'un deuxième joueur n'est pas nécessaire. Par exemple, la validation à travers une vérification du travail accompli (cette vérification pouvant se faire par une autre méthode, en changeant de référent, en utilisant un autre résultat ou en utilisant une information redondante). La validation à travers une vérification peut être faite par l'individu ayant développé la preuve.

Balacheff (1987) considère que les situations de validation mettent en jeu des processus avant tout dialectiques, car elles reposent sur l'étude du pour et du contre ainsi que sur la « prise en charge de contradictions potentielles » (p. 156). De plus, il mentionne que l'objectif des situations de validation est le développement de preuves. Brousseau, de son côté, considère les problèmes de validation comme la comparaison d'évaluation ou le rejet de preuves. À son avis, abandonner une idée vaut autant qu'en trouver une bonne. Ainsi, les situations de validation peuvent aussi être des situations d'invalidation.

2.1.1.4 Situations d'institutionnalisation

L'élève utilise ses connaissances pour résoudre les situations problématiques devant lesquelles il se retrouve. Cependant, il n'est généralement pas en mesure d'identifier explicitement les connaissances visées par l'activité proposée par l'enseignant, car l'objet de la connaissance n'est en principe pas identifiable. Ainsi, comme le souligne Brousseau (1986a), les dialectiques de la formulation et de la validation ne sont pas toujours suffisantes pour qu'il y ait apprentissage ou pour que celui-ci soit conforme au savoir en jeu. Conséquemment, les situations d'institutionnalisation sont nécessaires. Ces dernières permettent d'institutionnaliser certaines connaissances pour qu'elles prennent par la suite le statut de savoirs (les savoirs étant des connaissances institutionnalisées). Ainsi, les situations d'institutionnalisation permettent d'établir les rapports entre les comportements ou les productions de l'élève et le savoir savant. C'est donc à travers les actes d'institutionnalisation que l'enseignant prend en compte l'apprentissage de l'élève puis précise et fixe le savoir que tous les élèves devraient posséder. Les actes d'institutionnalisation permettent également à l'élève de prendre conscience des apprentissages réalisés et du travail qu'il reste à faire pour atteindre les objectifs fixés.

2.1.2 Liens entre les situations d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation

Dans le cadre de ses travaux sur les décimaux, Brousseau (1998) définit les principales caractéristiques des comportements en lien avec différents types de connaissances et adoptés par les élèves dans le cadre des quatre types de situations. Ces caractéristiques sont présentées au tableau I (p. 61).

Tableau I. Comportements observés selon le type de situations et le type de connaissances

Types de situations / Types de connaissances	Situation d'action	Situation de formulation sous contrôle d'une situation d'action	Situation de preuve (ou de validation)	Situation d'institutionnalisation
Procédure	Savoir-faire. Mettre en œuvre la procédure, la choisir de préférence à une autre.	Description détaillée Désignation	Justification de la procédure pertinente (elle peut s'appliquer) adéquate, correcte, optimale.	Canonisation d'une procédure en algorithme
Modèle implicite Propriété Relation Représentation	Faire des choix, prendre des décisions motivées par la connaissance en question (sans pouvoir « formuler » ce savoir).		Preuves contingentes expérimentales par exhaustivité.	
Savoir Énoncé Théorie	Appliquer un savoir (le savoir pourrait être formulé).	Énoncé de la propriété ou de la relation. Reformulation plus « correcte ».	Preuve Démonstration Traduction plus convaincante Organisation Axiomatisation	Canonisation d'une théorie, d'un savoir Transposition didactique
Langage	Emploi d'un langage pour exprimer. Le comportement manifeste un découpage en objets correspondants aux signes et aux mots.	Emploi d'un langage d'un système formel d'une formulation pour communiquer, savoir, dire.	Justification d'un mot, d'un langage, d'un modèle formel (pertinence, adéquation, optimisation) définitions. Activités métalinguistiques.	Choix de définitions, conventions linguistiques et grammaticales.

(Brousseau, 1998, p. 280)

Les situations d'action, de formulation et de validation ne peuvent être considérées comme indépendantes les unes des autres. En effet, les idées exprimées lors des situations de formulation reflètent le travail accompli, les décisions prises (ou du moins certaines des décisions prises) et les questions portant sur les situations d'action vécues par les élèves. De plus, comme le souligne Brousseau (1998), « la formulation est souvent facilitée s'il existe un modèle implicite d'action : le sujet sait mieux formuler un problème qu'il a su résoudre » (p. 128). Réciproquement, l'action est favorisée par une formulation appropriée. Les situations de validation, quant à elles, permettent de confirmer ou d'infirmer les modèles implicites développés dans les situations d'action tandis que l'action représente un mode de validation implicite. Il est également possible de concevoir le mouvement de va-et-vient qui peut avoir lieu entre les situations de formulation et les situations de validation. En effet, la validation ou l'invalidation d'énoncés mathématiques peut nécessiter des clarifications, des remises en question, etc. D'autre part, la construction de systèmes de preuves propres aux situations de validation peut se faire, entre autres, à travers l'argumentation et le débat (Balacheff, 1987). La part importante jouée par l'argumentation et le débat dans les situations de validation semble refléter la place des situations de formulation dans le développement de preuves. Or, un questionnement apparaît. Brousseau (1986a) souligne que dans les situations de formulation, le but de l'émetteur n'est pas d'agir sur le récepteur. Pourtant, le but de l'argumentation est d'amener l'autre à penser comme soi et donc d'agir sur sa perception de la situation. Conséquemment, un élève qui argumente se retrouve davantage dans une situation de validation que dans une situation de formulation. Un raisonnement semblable peut être appliqué au débat. Bien que ce dernier soit en fait composé d'échanges entre deux personnes ou plus, son format s'apparente davantage au schéma de la validation (annexe 4, p. 309) qu'au schéma de la communication (annexe 3, p. 308). En effet, lors d'un débat mathématique, les élèves occupent les rôles de proposant et d'opposant (et parfois d'exécutant), rôles plus associés à la dialectique de la validation. Toutefois, le fait de s'opposer à une proposition peut modifier le milieu en jeu. Si tel est le cas, ces échanges se rapprochent alors des situations de formulation. Le dernier type de situation identifié par Brousseau, soit l'institutionnalisation, peut se faire sur une situation d'action, de formulation ou de validation. L'enseignant institutionnalise une situation d'action lorsqu'il reconnaît, par exemple, la valeur d'une procédure utilisée par l'élève. L'institutionnalisation se fait sur une situation de formulation lorsque certains termes, certaines expressions sont conservés au détriment d'autres. Enfin, l'enseignant institutionnalise sur une situation de validation lorsque ce sont les propriétés des objets mathématiques étudiés qui sont définies comme les éléments à retenir.

Tout compte fait, l'identification précise du type de situation dans laquelle se retrouve un élève peut être complexe, car ce ne sont pas autant les comportements de l'élève qui nous permettent de cibler le type de situation que son projet :

> « *la situation vue par l'élève*, et en particulier *la finalité vue par l'élève* peuvent être différentes de ce qui a été prévu dans une analyse a priori. Or, c'est *la finalité vue par l'élève* qui permet de comprendre *la signification de ses actions* » (Margolinas, 1993, p. 162).

Les actions de l'élève sont donc davantage déclenchées que déterminées par la situation (René de Cotret, 1999). Le simple fait de demander à un élève d'échanger avec ses pairs n'est pas garant qu'il se retrouve dans une situation de formulation. Les situations de formulation concernent l'incertitude du milieu tandis que les situations de validation touchent davantage la consolidation des résultats mathématiques. Ainsi, les questions de précision font partie des situations de formulation tandis que les échanges ayant comme but de convaincre les autres font partie des situations de validation.

2.2 Raisonnement et développement de preuves

Différents éléments présents dans la littérature permettent d'étudier le développement de preuves chez les élèves du secondaire. Nous retrouvons, entre autres, la place que peut occuper (ou non) le raisonnement argumentatif dans le développement de preuves chez les élèves (Balacheff, 1999; Duval, 1991). D'autres éléments, tels que la typologie des preuves de Balacheff (1987), les arguments de validation de Mary (1999) ainsi que les différents types de preuves de Miyazaki (2000) nous permettent d'étudier plus en détail le développement de preuves.

2.2.1 <u>Distinctions relatives aux preuves</u>

Arsac et al. (1992) mettent en évidence certaines distinctions à faire dans la terminologie en lien avec la notion de preuve en soulignant la différence entre les termes explication, preuve et démonstration (figure 4, p. 64).

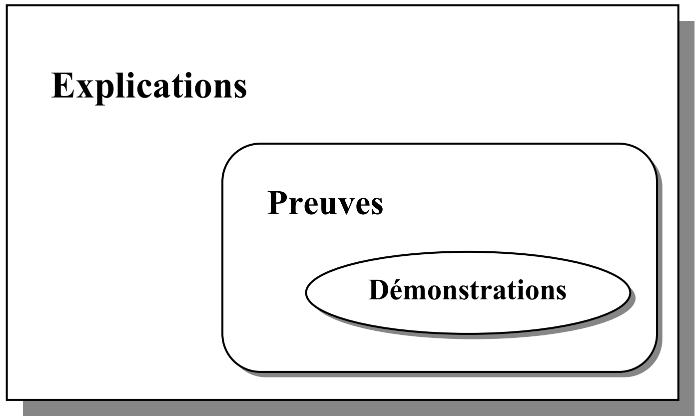


Figure 4. Distinction entre explications, preuves et démonstrations (Balacheff, 1982)

Une explication est reconnue comme « tout discours tenu par une personne ou un groupe dont l'objectif est de communiquer à l'autre le caractère de vérité d'un énoncé mathématique » (p. 5). La notion de preuve, de son côté, fait appel à la composante sociale. En effet, selon les auteurs, une preuve est « une explication acceptée par un groupe social » (p. 6). Enfin, le terme démonstration est associé à une preuve qui possède un caractère plus formel et qui est acceptée par les mathématiciens. Cette conception de la démonstration d'Arsac et al. découle des travaux de Balacheff. À ces termes, nous ajoutons l'argumentation ou encore le raisonnement argumentatif dont le statut au sein de la notion de preuve peut parfois sembler problématique.

2.2.1.1 <u>Raisonnement argumentatif et raisonnement déductif</u>

Certains remettent en question la place du raisonnement argumentatif lors du développement du raisonnement déductif chez les élèves (Balacheff, 1999; Duval, 1991). Selon Duval (1991), ces deux types de raisonnements diffèrent grandement. Lors de l'utilisation du raisonnement déductif, le statut opératoire de chaque énoncé devient particulièrement important. Chaque énoncé peut occuper l'un des trois statuts opératoires suivants : proposition d'entrée, règle d'inférence ou conclusion. L'ensemble de ces trois éléments représente un pas opératoire. Du côté de l'argumentation, c'est le contenu sémantique de chaque énoncé qui en détermine le poids. L'argumentation n'est alors qu'une accumulation d'arguments censés renforcer ou opposer les propos déjà émis. L'auteur ne considère pas une telle accumulation comme un véritable raisonnement déductif. De plus, un caractère de vérité est généralement associé à la preuve. Or, Arsac et al. (1992) soulignent que le but de l'argumentation, soit de convaincre, peut faire entrave au développement de preuves. En effet, selon ces auteurs, il est possible d'argumenter sans se soucier du caractère de vérité d'une assertion. L'argumentation ne peut donc être associée à la preuve. Balacheff (1999), de son côté, considère que le raisonnement argumentatif représente un obstacle épistémologique à l'apprentissage de la preuve en mathématiques. Laisser croire à un élève qu'il fait preuve de raisonnement déductif alors qu'il se limite à argumenter, c'est tomber dans le piège de l'effet Jourdain défini par Brousseau (1986a). L'argumentation étant considérée comme une activité sociale, elle ne peut être ignorée dans le cadre de notre projet. Il devient donc important de situer le raisonnement argumentatif par rapport aux notions d'explications, de preuves et de démonstrations. Étant donné que ce type de raisonnement repose sur l'accumulation d'arguments pour renforcer ou opposer les propos déjà émis et que le caractère de vérité de l'énoncé en jeu n'est pas nécessairement important pour les élèves qui argumentent, nous considérons que l'argumentation n'est pas un type d'explication (telle que définie par Balacheff) et que, par le fait même, elle doit se retrouver à l'extérieur du schéma initial proposé par Balacheff (figure 5, p. 65).

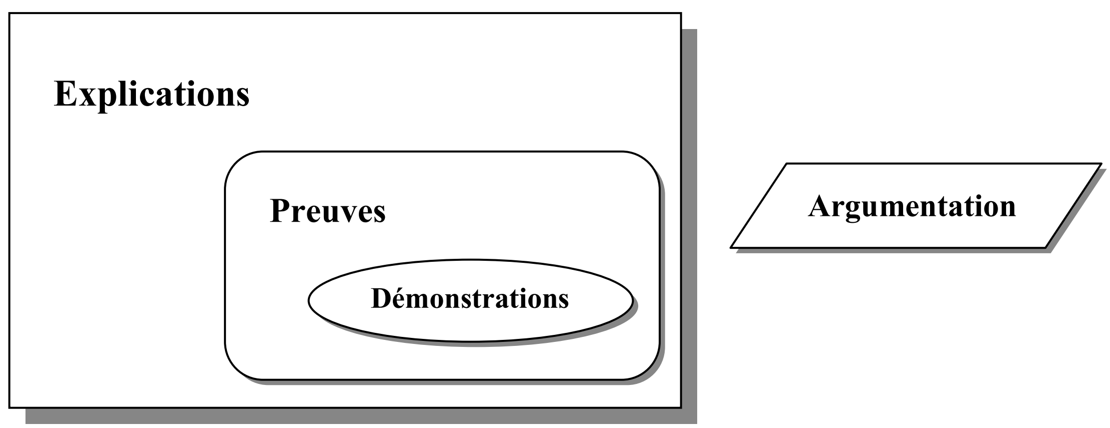


Figure 5. Distinction entre les termes explications, preuves, démonstrations et argumentation

2.2.2 <u>Typologie de preuves de Balacheff</u>

L'évolution du raisonnement chez les élèves est reflétée dans la typologie de preuves développée par Balacheff (1987) (figure 6, p. 66).

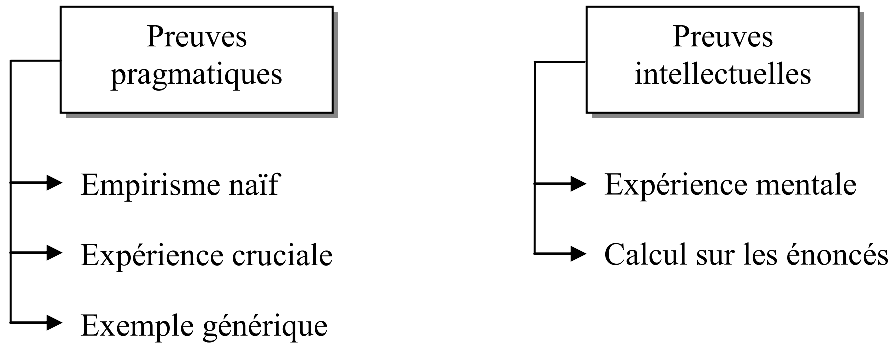


Figure 6. Typologie de preuves de Balacheff

On y retrouve deux niveaux de preuves, soit les preuves pragmatiques, qui reposent sur des constatations ou des mesures et les preuves intellectuelles, où l'idée de généralité est prédominante et où les conclusions sont basées sur des propriétés ou des définitions plutôt que sur un ou plusieurs cas. L'auteur différencie trois types de preuves pragmatiques :

- Empirisme naïf : Ce type de preuves se retrouve au bas de la hiérarchie de Balacheff et consiste à juger de la vérité d'une assertion à partir de l'observation de quelques cas.
- Expérience cruciale : La preuve à travers l'expérience cruciale consiste à généraliser à partir d'un cas qui est jugé particulier[48]. L'élève se dit que si c'est vrai même pour ce cas, alors cela devrait être vrai pour tous les cas. Ce qui différencie l'expérience cruciale de l'empirisme naïf, c'est que le problème de la généralisation est posé.
- Exemple générique : Dans le cas de l'exemple générique, des opérations ou des transformations sont réalisées sur un objet représentant une classe d'individus.

Deux types de preuves intellectuelles sont également définis :

- Expérience mentale : L'introduction d'actions intériorisées se fait lors de la preuve par expérience mentale. Les opérations ou les transformations sont alors faites sur un objet intériorisé considéré comme un représentant particulier.
- Calcul sur les énoncés : Ce genre de preuve est basé sur des théories plus ou moins formalisées et repose sur des définitions ou des propriétés caractéristiques explicites. La démonstration est une preuve de ce type où chaque énoncé est soit une

[48] Par exemple, l'élève peut réaliser un exemple à l'aide d'un nombre très grand ou encore construire une figure démesurément grande.

hypothèse, un énoncé dont la validité est déjà établie ou admise, soit un énoncé déduit, selon une règle explicite et convenue, d'énoncés qui le précèdent.

Ainsi, la typologie de preuves de Balacheff présente une hiérarchie où le passage se fait vers la généralisation et où les preuves sont de plus en plus formelles.

2.2.3 Typologie de preuves de Miyazaki

D'autres auteurs se basent sur les travaux de Balacheff pour concevoir une autre typologie des preuves. C'est le cas de Miyazaki (2000) qui a identifié six types de preuves permettant de représenter le passage des preuves inductives aux démonstrations algébriques chez les élèves du secondaire.

Deux axes sont d'abord considérés afin d'établir ces différents types de preuves :

- Axe du contenu : L'axe du contenu est en lien avec le type de raisonnement (inductif ou déductif) utilisé par les élèves.
- Axe de la représentation : L'axe de la représentation est associé au langage utilisé lors du développement de preuves. Les élèves peuvent utiliser un langage de démonstration formel ou tout autre langage, dessins ou objets manipulables.

En croisant l'axe du contenu et l'axe de la représentation, Miyazaki identifie quatre types de preuves qui se retrouvent à la base de son modèle (tableau II, p. 67).

Tableau II. Quatre types de preuves à la base du modèle de Miyazaki

Contenu / Représentation	Raisonnement inductif	Raisonnement déductif
Langage formel de la démonstration	Preuve D	Preuve A
Autres langages, dessins ou objets manipulables	Preuve C	Preuve B

(Traduction libre, p. 54)

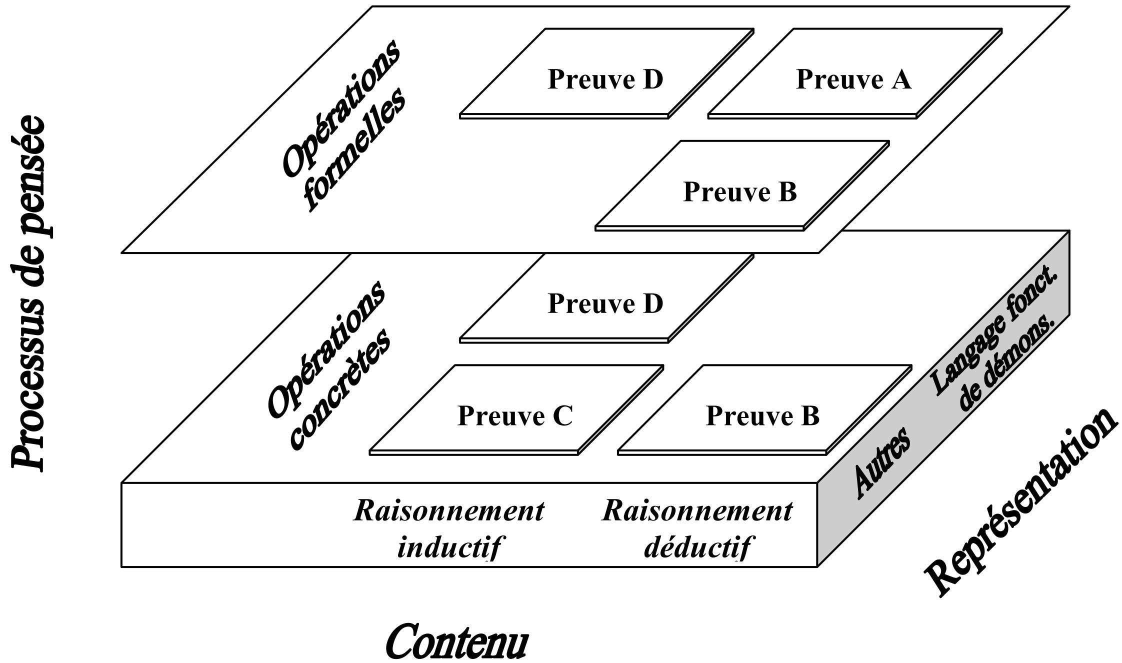
La preuve A représente la démonstration mathématique formelle. Elle fait appel aux critères les plus avancés à la fois sur l'axe du contenu (raisonnement déductif) et sur l'axe de la représentation (langage formel de la démonstration). Par conséquent, c'est le type de preuves le plus important dans la hiérarchie. Elle peut être associée au calcul sur les énoncés de la typologie de Balacheff. À l'opposé, dans la typologie suggérée par Miyazaki, la preuve C est la moins satisfaisante, car l'élève qui la produit a recours aux critères les moins avancés sur les axes du contenu (raisonnement inductif) et de la représentation (autres langages). La preuve par empirisme naïf ainsi que la preuve par expérience cruciale de la typologie de Balacheff entrent dans cette catégorie. Les preuves B et D sont des preuves intermédiaires aux preuves A et C, car elles font parallèlement appel à une catégorie de la preuve A et à une catégorie de la preuve C. La preuve B, par exemple, peut être associée à l'expérience mentale, car elle présente un raisonnement déductif, mais sa présentation n'est pas entièrement formelle. L'exemple générique de la typologie de Balacheff, pour sa part, peut être associé à la preuve D. En effet, ce type de preuve fait appel au raisonnement inductif et l'élève peut faire appel à un langage formel ou non pour expliciter son raisonnement.

S'inspirant des travaux de Piaget, Miyazaki complexifie par la suite son modèle en y ajoutant un troisième axe :

- Axe du processus de pensée de l'élève : L'axe du processus de pensée de l'élève touche le traitement de l'information. Ce dernier peut se faire à l'aide d'opérations concrètes (entre autres, le calcul de quelques exemples ou la manipulation d'objets[49]) ou à l'aide d'opérations formelles (par exemple, l'utilisation de propriétés mathématiques, de définitions, etc. pour passer d'une proposition à une autre). Les opérations concrètes peuvent être associées aux preuves pragmatiques de Balacheff (1987), alors que les opérations formelles sont en lien avec les preuves intellectuelles.

Le modèle en trois dimensions présentant les six différents types de preuves proposés par Miyazaki est présenté à la figure 7 (p. 69).

[49] L'auteure donne l'exemple de l'utilisation de billes, alignées en trois colonnes, pour représenter trois nombres entiers consécutifs. Il est alors possible pour les élèves de déplacer une bille de la dernière colonne dans la première colonne, ce qui les amène à réaliser que faire la somme de trois nombres entiers consécutifs revient à multiplier le nombre au centre par trois.



(Traduction libre, p. 64)

Figure 7. Six types de preuves de Miyazaki

Si le processus de pensée était indépendant du contenu ou de la représentation que les élèves se font de la preuve, le modèle contiendrait huit et non six types de preuves. Or, l'auteure soutient que le processus de pensée le plus élevé, soit l'utilisation d'opérations formelles, est nécessaire à la production d'une démonstration chez les élèves du secondaire. C'est pour cette raison que la preuve A ne se retrouve pas dans la partie inférieure du modèle. L'auteure explique également, en ce qui a trait à la preuve C, que :

> « *both with concrete operations and formal operations, one can reason inductively. However, the essential characteristics of formal operations involve deductive reasoning with propositions. Therefore,* « *Proof C with formal operations* » *is identified with* « *Proof C with concrete operations* » (p. 56-57) ».

Le modèle proposé par Miyazaki, bien que pertinent, ne présente aucune information explicite sur le type de travail que les élèves peuvent accomplir lorsqu'ils présentent tels ou tels types de preuves. Il semble donc pertinent de proposer d'autres pistes nous permettant de reconnaître plus facilement les différents types de preuves développées par les élèves. Par conséquent, c'est dans le but de raffiner notre représentation des différents types de validation que nous nous tournons vers les travaux de Mary (1999).

2.2.4 Grille d'analyse de Mary

S'inspirant de travaux de Balacheff (1982, 1987, 1988, 1998) et de Margolinas (1989), Mary (1999) a développé une grille d'analyse afin d'étudier la place et les fonctions de la validation du point de vue des futurs enseignants de mathématiques au secondaire (figure 8, p. 71). Dans cette grille, nous retenons particulièrement les différents types d'arguments[50] (de validation) qui peuvent être utilisés dans une situation de validation. Il importe de souligner que l'auteure ajoute deux types d'arguments qui n'ont point été mentionnés par Balacheff et Miyazaki : la validation à travers une figure d'autorité et la validation à travers une vérification du travail (par exemple, en utilisant une nouvelle méthode).

2.2.5 Mise en commun des travaux de Balacheff, de Miyazaki et de Mary

Les éléments présents dans la typologie de preuves de Balacheff, dans les six types de preuves de Miyazaki et dans la grille d'analyse de Mary peuvent être regroupés afin de créer une typologie plus riche des différents types de preuves. Le résultat est présenté à la figure 9 (p. 72).

[50] Nous reprenons ici le terme utilisé par Mary (1999). Il importe toutefois de préciser que l'auteure n'associe pas le terme « argument » à la connotation négative que certains auteurs, tels que Balacheff (1999) et Duval (1991), accordent au terme « argumentation ». Dans ce cas-ci, un argument de validation représente tout simplement un moyen utilisé pour valider.

- Type d'activités
  - résolution de problèmes
  - activité pour développer une nouvelle connaissance
  - validation d'un énoncé (soumis)
  - explication de l'enseignant

- Type d'arguments (de validation)
  - autorité
  - pragmatique (action)
    - mesures
    - tableau de valeurs
    - essais numériques
    - expérience cruciale
    - constat sur matériel
  - vérification
    - par une autre méthode
    - en changeant de référent
    - en utilisant un autre résultat
    - en utilisant une information redondante
  - inductif menant à une évidence
    - exemple générique
  - intellectuel
    - preuve particulière
    - expérience mentale
    - raisonnement sur les priorités
    - démonstration plus ou moins formelle
      - Niveau de <u>formalisation selon le</u> degré de :
        - symbolisation
        - référence au contexte
        - degré d'explicitation

- Type de validation selon la structure de la leçon
  - avec point de départ expérimental
    - par nature
    - démarche de preuve
  - sans point de départ expérimental
    - opératoire
    - démonstrative
      - implicite
      - formelle

- Type de démarche
  - axiomatique
  - inductive : du particulier au général
  - scientifique (conjectures-tests-preuve)

- Fonctions de la validation (chercher la vraisemblance ou la nécessité)
  - prouver - on conclut que c'est nécessairement vrai
  - expliquer en argumentant, - on conclut que ça a du sens
  - vérifier un résultat - on conclut qu'il est plausible
  - tester un modèle

- Fonctions de la preuve (chercher la nécessité)
  - communiquer un résultat à la classe
  - convaincre, V ou F (implication des élèves / débat)
  - expliquer, faire comprendre (appel à la signification des concepts)
  - produire des connaissances / activités de découverte
    - pour augmenter les outils
    - systématiser
  - vérifier, V ou F (calculs, démonstrations)

(Mary, 1999, p. 143)

Figure 8. Grille d'analyse de Mary permettant de caractériser la validation

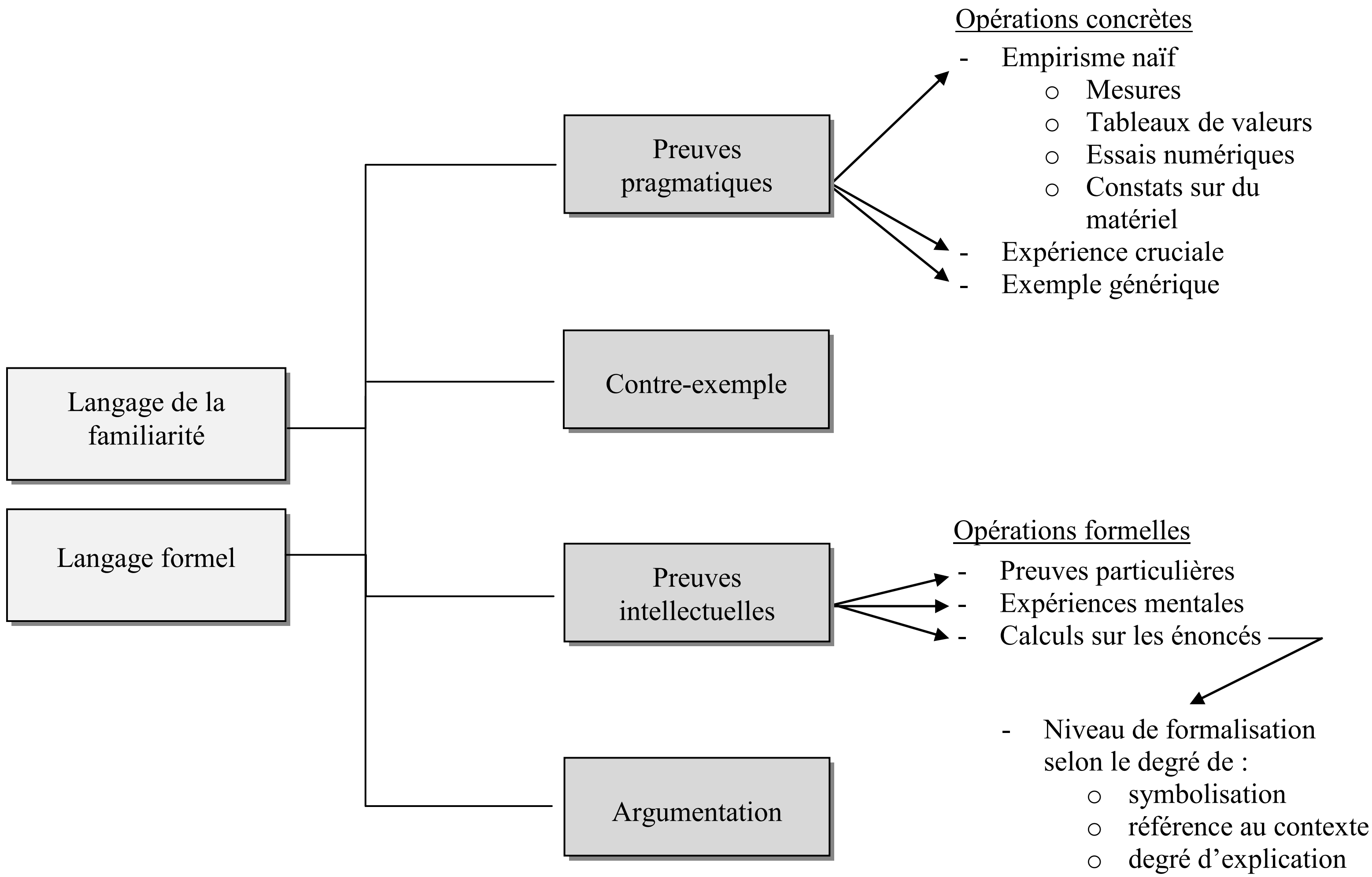


Figure 9. Schéma des différents types de preuves à partir des travaux de Balacheff, de Miyazaki et de Mary

La typologie des preuves de Balacheff est reprise au complet et certains éléments propres à Miyazaki et à Mary y sont ajoutés. Le principal apport du modèle de Miyazaki repose dans la prise en compte de l'axe du contenu, soit du type de langage utilisé lors de l'élaboration de la preuve. Le degré de formalisme présent dans une preuve ou dans une solution nous aide à faire des liens avec le calcul sur les énoncés. Le langage de la familiarité, pour sa part, peut être associé à différents types de preuves. Ce n'est donc pas autant le fait d'utiliser le langage de la familiarité que le fait de privilégier une méthode plutôt qu'une autre qui va nous permettre de faire des liens avec un type de preuves précis. Seule une partie de la grille d'analyse de Mary est retenue dans le cadre de notre travail, soit les types d'arguments de validation. Cette section de la grille permet d'associer plus facilement le travail réalisé par les élèves et les différents types de preuves identifiés par Balacheff. En effet, les types d'arguments de validation représentent des exemples concrets du genre de travail que les élèves peuvent accomplir pour valider. Deux types d'arguments de validation de Mary ne figurent pas dans les modèles de Balacheff et de Miyazaki : la validation par la vérification et la validation par autorité. La validation par autorité (que ce soit par une figure d'autorité ou tout simplement par un argument autoritaire) a été ajoutée au modèle et est rattachée à l'argumentation. Le type de validation qualifié de « vérification » par Mary n'est pas pris en compte dans le cadre de notre recherche, car sur papier il est pratiquement impossible de savoir si les élèves, en présentant une deuxième façon de faire, vérifient leur travail ou pensent tout simplement l'améliorer (plus il y a de « preuves », plus c'est convaincant). L'utilisation de plusieurs méthodes ne témoigne donc pas nécessairement d'un souci de validation. D'autres éléments présents dans la grille d'analyse de Mary permettent de préciser certaines composantes de la typologie de Balacheff. Nous retenons, entre autres, les exemples de preuves par empirisme naïf suivants : mesures, tableaux de valeurs, essais numériques et constats sur du matériel. Les différents degrés de formalisation présentés dans la grille de Mary et associés au calcul sur les énoncés, à savoir l'utilisation de la symbolisation, la référence au contexte ainsi que le degré d'explication, sont également conservés.

Enfin, le travail des élèves qui se retrouvent en situation de validation peut se résumer à deux options : valider un énoncé mathématique ou invalider un énoncé mathématique. Dès lors, il semble que le contre-exemple, qui peut être utilisé pour invalider un énoncé mathématique, devrait être ajouté à la liste des types de preuves proposée par les auteurs. La prise en compte du contre-exemple permet aussi de faire un lien entre les règles du débat mathématique d'Arsac et al. (1992) et les différents types de preuves développés par les élèves.

2.3 Champ mathématique exploité

Le « domaine de la mathématique » dans le programme de formation de l'école québécoise englobe cinq champs mathématiques en lien avec le contenu de formation : l'algèbre, l'arithmétique, la géométrie, la probabilité et la statistique. Les programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick présentent plutôt quatre domaines mathématiques : le nombre (le système numérique et les opérations), les régularités et les relations (les régularités, l'algèbre et les relations), les formes et l'espace (la mesure, les figures géométriques planes et les solides et les transformations) et la statistique et les probabilités. Les champs mathématiques présents dans les programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick et du Québec sont donc les mêmes. Seule la terminologie utilisée pour en parler diffère.

Dans les programmes d'études de mathématiques du MELS et du MENB ainsi que dans les manuels scolaires, le développement de preuves (et par le fait même le développement des raisonnements inductif et déductif) est principalement associé à la géométrie. Actuellement, il existe plusieurs outils technologiques qui permettent l'exploitation du développement de preuves en géométrie. Parmi ceux-ci, nous retenons les logiciels de géométrie dynamique (par exemple Cabrigéomètre, GéoGebra et Géonext) qui peuvent être utilisés pour amener les élèves à remarquer et à décrire des régularités, à formuler des généralisations et à vérifier des conjectures mathématiques. Nous retenons également les environnements informatiques d'apprentissage humain tel que le logiciel TURING[51], en développement à l'Université de Montréal et visant l'apprentissage de la démonstration au secondaire. Toutefois, le développement de preuves peut aussi être associé à l'arithmétique et à l'algèbre. En effet, dans les éléments de méthode du programme de formation de l'école québécoise pour le premier cycle du secondaire, le MELS (2005) présente un certain nombre de conjectures pouvant être présentées aux élèves et destinées à les amener à développer leur habileté à prouver. En voici quelques exemples :

- « La somme de deux nombres naturels consécutifs est impaire. »

[51] TURING est un acronyme de TUtoRiel INtelligent en Géométrie.

- « Le produit de deux nombres strictement positifs est supérieur ou égal à chacun de ces deux nombres. »
- « Si un nombre entier est pair, alors il se termine par le chiffre 2. » (p. 254).

La tâche des élèves consiste alors à valider l'énoncé mathématique en expliquant leur raisonnement ou à l'invalider en présentant un contre-exemple. C'est le champ mathématique de l'algèbre qui retient notre attention et qui sera exploité dans le cadre de cette recherche, champ riche, important au secondaire, ayant un langage formel et se prêtant bien à la preuve étant donné qu'il offre un outil de modélisation et d'expression de régularités.

2.4 Questions de recherche

L'étude de la TSD et des différentes typologies de preuves réalisée dans ce chapitre nous conduit à préciser nos questions de recherche de la façon suivante :

1. Quelle est l'influence de l'utilisation d'un forum électronique, lors de la réalisation d'activités mathématiques en algèbre, sur le développement d'habiletés de validation chez des élèves qui en sont à leur 8e année de scolarité?
   i. Quels types de preuves sont utilisés par les élèves lorsqu'ils se retrouvent en situation de validation algébrique[52] en salle de classe (papier-crayon) ou dans un forum électronique?
   ii. Quelles sont les règles du débat mathématique mobilisées par les élèves, en salle de classe (papier-crayon) ou dans un forum électronique, lorsqu'ils développent une preuve en lien avec un problème algébrique?

2. Quelle est l'influence de l'utilisation d'un forum électronique, lors de la réalisation d'activités en algèbre, sur le développement d'habiletés en lien avec l'évaluation de preuves ou de solutions chez des élèves qui en sont à leur 8e année de scolarité?
   i. Quelles sont les règles du débat mathématique mobilisées par les élèves, en salle de classe (papier-crayon) ou dans un forum électronique, pour valider ou invalider une preuve ou une solution développée pour répondre à un problème algébrique?

[52] Dans le cadre de cette recherche, l'expression « validation algébrique » est associée à toute situation de validation qui découle de la résolution d'un problème où l'élève est susceptible de porter un regard algébrique.

Afin de répondre à ces questions, certaines variables doivent être considérées. Évidemment, la présence ou l'absence du forum électronique représente la variable qui se trouve au centre de notre projet de recherche. Les autres principales variables qui entrent en jeu sont les types de preuves et les différents types de solutions utilisés par les élèves, les problèmes proposés ainsi que les éléments externes qui influencent le milieu, telles que les interventions de l'enseignant.

2.5 Pertinence et originalité du projet de recherche

Notre projet de recherche se situe dans la lignée des programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick et du programme de formation de l'école québécoise. Cependant, bien que les quatre principes pédagogiques retrouvés dans les programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick et les trois compétences identifiées dans le programme de formation de l'école québécoise soient intégrés, d'une façon ou d'une autre, à notre projet de recherche, le raisonnement mathématique ainsi que la communication à l'aide d'un langage mathématique y occupent une place prépondérante. En effet, nous nous intéressons non seulement aux différentes formes de preuves que peuvent développer les élèves du secondaire lorsqu'ils se retrouvent en situation de validation algébrique, mais également aux types d'arguments utilisés pour valider ou invalider des preuves développées par leurs pairs. La compétence « communiquer mathématiquement » prend donc toute son ampleur dans notre exploitation d'un outil de communication en ligne.

À l'heure actuelle, ce sont principalement des outils technologiques tels que la calculatrice à affichage graphique, les tableurs et les logiciels de géométrie dynamique qui sont exploités dans les cours de mathématiques de niveau scolaire. Notre projet de recherche tire son originalité du fait que nous dépassons ces utilisations usuelles des TIC. En effet, nous sortons du cadre habituel de l'exploitation des TIC en visant l'intégration d'un outil de communication en ligne dans les cours de mathématiques. L'exploitation d'un outil de communication nous permet d'explorer la composante sociale sous un autre jour (en ligne plutôt qu'en personne), composante fortement favorisée dans les programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick et du Québec.

Enfin, la majorité des ressources retrouvées en ligne et adaptées aux élèves leur permettent de naviguer pour chercher de l'information ou encore pour poser des questions.

À notre connaissance, il n'existe pas de sites Internet qui leur permettent réellement de remettre en question leur travail et celui des autres. Les situations de validation vécues par des élèves sont rares en ligne. Ainsi, notre projet de recherche favorise, à travers une communication ouverte, la verbalisation par les élèves de leur compréhension de la situation et la communication entre eux pour construire leurs connaissances. De plus, l'approche proposée vise à échapper à la fois à certaines contraintes d'enseignement, telles que le temps alloué ou la taille du groupe d'élèves qui, dans un contexte en ligne, ne sont plus limités.

3. MÉTHODOLOGIE

Ce chapitre est centré sur les éléments méthodologiques en lien avec notre projet de recherche. La première section touche le dispositif expérimental, incluant certaines conjectures sur les types d'interactions vécues en ligne ainsi que l'ensemble des problèmes retenus pour chacune des activités. La population ayant participé à notre expérimentation fait l'objet de la deuxième section. Les niveaux scolaires visés ainsi que la façon dont le recrutement des participants se fait sont précisés. Enfin, les différents outils utilisés lors de la cueillette des données sont au centre de la troisième section. C'est à ce moment que l'outil de communication retenu pour les besoins de cette recherche ainsi que certains biais méthodologiques, en lien avec les enseignants et la chercheuse, sont présentés.

3.1 Expérimentation

L'expérimentation se fait en plusieurs étapes et vise à amener les élèves à appuyer les éléments de preuves sur des réponses qu'ils ont préalablement développées ou sur des solutions d'élèves fictifs qui leur sont présentées. Un résumé de l'expérimentation est présenté au tableau III (p. 80)[53]. Le nom ou le numéro de l'activité se trouve à l'extrême gauche du tableau. La première colonne indique l'activité concernée. La deuxième colonne contient les problèmes ainsi qu'une brève description de la tâche à accomplir. La dernière colonne précise le temps réservé pour chaque activité. Lorsqu'une activité se fait individuellement, ce temps est le même pour les élèves des deux groupes. Lorsqu'une activité se fait en équipe, deux informations sont présentées dans le tableau : le temps accordé au groupe contrôle pour les échanges en classe et le temps accordé au groupe expérimental pour les échanges en classe et pour les échanges dans le forum électronique. Le premier nombre entre parenthèses représente le temps réservé aux échanges en classe alors que le deuxième nombre représente le temps réservé pour les échanges dans le forum électronique. Évidemment, le temps total réservé aux échanges est le même pour les deux groupes. Notons toutefois que les activités et les échanges restent en ligne pendant toute la durée de l'expérimentation. Les élèves sont donc libres de revenir sur certaines questions comme bon leur semble et ce, que ce soit à l'extérieur des heures de classe (par exemple, à

[53] Dans les documents remis aux élèves, chaque question est identifiée par une seule lettre (a, b, etc.). Pour faciliter la tâche du lecteur à faire des liens entre les questions présentées dans cette section et celles analysées dans le chapitre 4 (*4. Analyse des données*, p. 136), chaque question a été renommée. Les premières lettres marquent l'activité où cette question a été présentée, le type de travail est indiqué entre parenthèses et le numéro du problème est écrit après le tiret, suivi d'une lettre indiquant la question posée.

la maison) ou pendant les heures de classe (par exemple, s'ils ont du temps de libre). Cependant, aucun échange supplémentaire ne peut avoir lieu dans le cadre du cours de mathématiques. Cette précaution est prise pour éviter que les enseignants du groupe expérimental passent plus de temps sur les activités que les enseignants du groupe contrôle. Une version plus détaillée du dispositif expérimental (prétest, activités mathématiques et post-test) est présentée au tableau XCV, à l'annexe 5 (p. 310).

Les élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental[54] répondent individuellement, en salle de classe, aux questions d'un prétest. Après l'administration du prétest, quatre activités en lien avec l'algèbre sont réalisées sur une période de quatre mois. Ces activités s'intègrent à l'enseignement régulier. Le travail que les élèves doivent accomplir lors de la réalisation de ces activités s'inspire des travaux d'Arsac et al. (1992) et repose sur trois temps. Ils ont à résoudre des problèmes, à valider leur solution et celles des autres et, enfin, à comparer différentes solutions proposées à un même problème de manière à déterminer lesquelles sont les plus convaincantes. Bref, ils ont à se convaincre pour ensuite convaincre les autres. L'expérimentation se termine par un post-test qui, comme le prétest, doit être complété individuellement et en salle de classe. Tout au long de l'expérimentation, le travail d'équipe du groupe contrôle se passe entièrement en salle de classe. En ce qui a trait aux échanges entre les élèves du groupe expérimental, ils ont d'abord lieu en classe (hors ligne) et se poursuivent dans le forum électronique. Il semble pertinent de leur permettre de discuter du problème à l'étude avant de se rendre en ligne, afin qu'ils perdent le moins de temps possible lorsqu'ils sont devant l'ordinateur. De plus, cette façon de fonctionner nous permet de conserver des traces (sur papier) de toutes les activités (qu'elles aient été réalisées individuellement ou complétées en équipe).

---

[54] Pour connaître la composition de ces groupes, voir la section *3.2 Population* (p. 118).

Tableau III. Résumé de l'expérimentation

	Problèmes	Tâches	Temps
Prétest	Problème 1 : Le nombre de cure-dents	**Pré(Ind)-1a** : Identifier le nb de cure-dents dans la dixième figure **Pré(Ind)-1b** : Trouver le nb de cure-dents dans n'importe quelle figure	45 minutes
	Problème 2 : Qui a réussi à te convaincre?	**Pré(Ind)-2a** : Classer plusieurs preuves **Pré(Ind)-2b** : Expliquer les raisons d'être de ce classement.	
	Problème 3 : Deux nombres impairs consécutifs	**Pré(Ind)-3** : Identifier si la conjecture est vraie ou fausse	
Activité 1	Problème 1 : Le nombre de cure-dents	**Act1(Eq)-1a** : Déterminer les solutions qui doivent être retenues **Act1(Eq)-1b** : Déterminer les solutions qui doivent être rejetées	45 minutes ↓ (15 + 30 minutes)
	Problème 2 : Qui a réussi à te convaincre?	**Act1(Ind)-2** : Classer plusieurs preuves	
		Act1(Eq)-2a : Classer plusieurs preuves **Act1(Eq)-2b** : Échanger sur le classement des solutions **Act1(Eq)-2c** : Classer plusieurs preuves	
		Institutionnalisation : Activité 1	
Activité 2	Problème 4 : Bonne question!	**Act2(Ind)-4a** : Identifier si la conjecture est vraie ou fausse	60 minutes ↓ (30 + 30 minutes)
		Act2(Eq)-4b : Échanger afin de déterminer quelles solutions doivent être retenues **Act2(Eq)-4c** : Échanger afin de déterminer quelles solutions doivent être rejetées	
	Problème 5 : Vrai ou faux?	**Act2(Ind)-5a** : Identifier si la conjecture est vraie ou fausse	
		Act2(Eq)-5b : Échanger afin de déterminer quelles solutions doivent être retenues **Act2(Eq)-5c** : Échanger afin de déterminer quelles solutions doivent être rejetées	
		Institutionnalisation : Question Pré(Ind)-3 et Activité 2	

Activité 3	Problème 6 : Pierre et Paul	**Act3(Ind)-6a** : Identifier, entre deux preuves, laquelle ou lesquelles sont vraies.	Devoir
		Act3(Ind)-6b : Expliquer les raisons de ce choix	
		Act3(Eq)-6a : Indiquer les arguments donnés pour dire que quelqu'un a raison ou tort	45 minutes ↓ (15 + 30 minutes)
		Act3(Eq)-6b : Prendre position par rapport aux arguments donnés	
		Institutionnalisation : Activité 3	
Activité 4	Problème 7 : Les carreaux hachurés	**Act4(Ind)-7a :** Identifier le nb de carreaux hachurés la huitième figure	20 minutes
		Act4(Ind)-7b : Trouver le nb de carreaux hachurés dans n'importe quelle figure	
		Act4(Eq)-7a : Échanger afin de déterminer quelles solutions doivent être retenues	70 minutes ↓ (40 + 30 minutes)
		Act4(Eq)-7b : Échanger afin de déterminer quelles solutions doivent être rejetées	
		Act4(Eq)-7c : Classer plusieurs preuves	
		Act4(Eq)-7d : Expliquer les raisons d'être de ce classement.	
		Institutionnalisation : Activité 4	
Post-test	Problème 8 : Des cercles et des carrés	**Post(Ind)-8a** : Identifier le nb de carrés dans la septième figure	45 minutes
		Post(Ind)-8b : Trouver le nb de carrés dans n'importe quelle figure	
	Problème 9 : La plus convaincante de toutes	**Post(Ind)-9a** : Classer plusieurs preuves	
		Post(Ind)-9b : Expliquer les raisons d'être de ce classement.	
	Problème 10 : Un nombre et son carré	**Post(Ind)-10** : Identifier si la conjecture est vraie ou fausse	
		Institutionnalisation pour l'ensemble des activités	

Les situations d'institutionnalisation ont lieu en salle de classe, et ce, autant pour le groupe expérimental que pour le groupe contrôle. Tous les enseignants reçoivent un solutionnaire dans lequel plusieurs réponses sont présentées pour chacun des problèmes (annexe 6, p.316). Le contenu à aborder lors de l'institutionnalisation leur est fourni, mais la façon de l'aborder est entièrement sous leur contrôle. Cette institutionnalisation ne se fait pas nécessairement au même moment dans les deux groupes. Chez le groupe contrôle, l'institutionnalisation a lieu en conclusion du travail fait par les élèves (en tenant compte du travail fait en classe et des échanges avec leurs pairs). L'institutionnalisation a donc lieu à la fin d'une activité. Chez le groupe expérimental, l'institutionnalisation a aussi lieu en conclusion du travail fait par les élèves (depuis le travail en classe jusqu'aux échanges électroniques). Toutefois, elle ne doit avoir lieu que lorsque les échanges en ligne portant sur une activité semblent s'épuiser. Afin de permettre cet épuisement, il est suggéré de laisser s'écouler une semaine entre la fin de l'activité et l'institutionnalisation. Cette semaine est réservée à des échanges libres supplémentaires qui ont lieu à l'extérieur du cadre du cours de mathématiques.

3.1.1 Choix des problèmes

L'ensemble des problèmes présentés aux élèves s'inspire des problèmes proposés dans les programmes d'études de mathématiques de 7^{e} et 8^{e} années du Nouveau-Brunswick et du programme de formation de l'école québécoise pour l'enseignement secondaire (premier cycle)[55]. Certains problèmes s'inspirent également des travaux d'Arsac et al. (1992) et du contenu retrouvé dans les manuels scolaires Interactions 7 (Elchuck *et al.*, 1997a) et Interactions 8 (Elchuck *et al.*, 1997b). Ces problèmes touchent la recherche de régularités (suite linéaire) ainsi que la validation ou l'invalidation de conjectures. Certains ont été modifiés afin d'amener les élèves à échanger, entre autres, sur les différents types de preuves pouvant être soumis comme solution à un même problème. Toutes les activités faisant partie de notre expérimentation sont composées de plusieurs problèmes ou encore de plusieurs questions ayant trait à un seul problème. À travers ces questions, nous tentons de respecter les éléments qui, selon Brousseau (1986a), sont essentiels pour amener les élèves à utiliser le langage mathématique :

[55] Voir, par exemple, la page 254 du programme de formation de l'école québécoise (enseignement secondaire, premier cycle) (Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2005).

- le jeu avec le milieu doit encourager, de la part de l'élève, l'utilisation d'un discours riche et pertinent;
- le jeu avec le milieu doit nécessiter un emploi fréquent du langage mathématique;
- les messages produits doivent pouvoir être analysés.

L'ensemble des activités où les élèves travaillent en équipe, que ce soit en salle de classe ou dans le forum électronique, suscite des discussions. Les élèves doivent alors utiliser un vocabulaire clair et précis afin d'être en mesure d'expliquer les stratégies mises en œuvre lors de la situation d'action. De plus, étant donné que chaque activité réalisée par les élèves en salle de classe est accompagnée d'un document (papier) à remplir et que le forum électronique conserve des traces des échanges qui ont lieu en ligne, tous les messages produits par les élèves sont disponibles pour être analysés par l'enseignant ou, plus particulièrement dans ce cas-ci, par la chercheuse.

Lors de la réalisation de ces activités, deux types de savoir entrent en jeu : un savoir mathématique, lorsque les élèves travaillent l'aspect arithmétique ou algébrique des problèmes et un savoir protomathématique, lorsque les connaissances en jeu touchent les règles de logique en lien avec le développement et l'évaluation de preuves[56]. Chaque question est décrite en termes de phases (action, formulation et validation). Les activités sont également décortiquées de façon à présenter la tâche que les élèves doivent accomplir ainsi que les solutions pouvant être soumises (qu'elles soient correctes ou non).

L'ensemble des problèmes qui ont servi à l'expérimentation ainsi que certaines solutions associées à chacun d'entre eux sont présentés dans les sections qui suivent. Pour un aperçu de ces questions en bloc, sans l'analyse qui les accompagne, voir l'annexe 7 (p. 325).

3. 1.1.1 <u>Prétest</u>

Un prétest (version papier) composé de trois problèmes en lien avec l'algèbre et devant être résolus individuellement en salle de classe est distribué aux élèves du groupe expérimental ainsi qu'aux élèves du groupe contrôle. Le temps total réservé à

[56] Certaines de ces règles ont déjà été abordées en salle de classe, lors de l'enseignement habituel. Dans le cadre de notre projet, elles ne sont pas explicitement présentées aux élèves. Elles sont plutôt abordées par les enseignants lors de l'institutionnalisation (en fonction des réponses soumises par les élèves). Le fait de présenter ces règles aux élèves risquent de grandement les influencer. Dans une telle situation, le jeu sur le contrat didactique est trop fort et il est possible que les élèves essaient davantage de répondre en fonction des règles qu'en fonction de ce qui les convainc réellement.

l’administration du prétest est d’environ 45 minutes[57]. La première question touche la recherche de régularité, la deuxième l’évaluation de différents types de preuves et la dernière question vise le développement d’une preuve.

Dans le premier problème présenté dans le prétest (figure 10, p. 84), les élèves doivent, après avoir observé les trois assemblages de cure-dents, trouver le nombre de cure-dents composant la dixième figure. Ils doivent ensuite proposer une façon de trouver le nombre de cure-dents dans n’importe quelle figure. La première question fait appel à un savoir mathématique, plus précisément les suites linéaires, et devrait être répondue assez facilement par des élèves de 12 à 14 ans. Sa fonction première est donc de permettre à l’élève de se familiariser avec le problème sans pour autant qu’il ne se sente dépassé par celui-ci.

<u>Problème 1 : Le nombre de cure-dents</u> (adapté de Elchuck *et al.*, 1997a, p. 234)

À l’aide de cure-dents, on a formé cette suite de carrés.

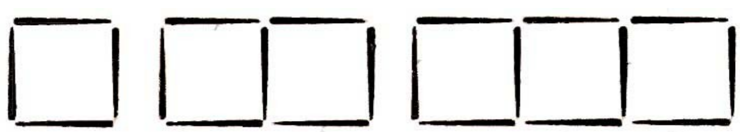


Figure n° 1 Figure n° 2 Figure n° 3

Pré(Ind)-1a :
Si on poursuit selon le même principe, combien de cure-dents y aura-t-il dans la figure n° 10?

Pré(Ind)-1b :
Donne une façon qui te permet de trouver le nombre de cure-dents pour n’importe qu’elle figure.

Figure 10. Prétest – Problème 1 : Le nombre de cure-dents

Lors de la résolution de cette question, les élèves se trouvent en phase d’action et peuvent s’y prendre de différentes façons. Ils peuvent dessiner l’assemblage propre à la figure n° 10, créer un tableau de valeurs (tableau IV, p. 85) et observer le nombre de cure-dents devant être ajoutés à chaque figure pour passer à la figure suivante (dans ce cas-

[57] Environ 15 minutes pour l’installation et 30 minutes pour répondre aux questions.

ci, pour passer à la prochaine figure, il faut ajouter trois au nombre de cure-dents de la figure précédente) ou encore, en observant les trois premiers assemblages proposés, trouver un programme de calcul qui leur permet de déterminer le nombre de cure-dents pour n'importe quelle figure. Peu importe la méthode utilisée par les élèves, la réponse obtenue est la même : il y a 31 cure-dents dans la dixième figure.

Tableau IV. Tableau de valeurs – Question Pré(Ind)-1a

Numéro de la figure	1	2	3	…	10
Nombre total de cure-dents	4	7	10	…	31

Dans un deuxième temps, les élèves doivent trouver comment faire pour obtenir le nombre de cure-dents dans n'importe quelle figure. Ce genre de question risque de susciter la « création » de nombreuses solutions, ce qui nous permet d'identifier si les élèves favorisent un travail plus pragmatique ou plus intellectuel. Évidemment, certains élèves risquent de ne pas voir le caractère de généralité sous-jacent à cette question. Ils peuvent alors conserver la méthode utilisée à la question *Pré(Ind)-1a*, c'est-à-dire produire une réponse spécifique et non générale. Cette réponse est alors liée à l'empirisme naïf. Pourtant, cette question vise davantage la recherche d'une régularité de la part des élèves afin de les amener à proposer une formule générale ou un programme de calcul leur permettant de trouver le nombre de cure-dents pour n'importe quelle figure. Encore une fois, le savoir en jeu est mathématique.

L'utilisation de différentes expressions mathématiques peut se manifester dans les productions d'élèves. Par exemple, lors de la phase d'action, les deux expressions suivantes peuvent être suggérées : $4 + 3(n - 1)$ et $3n + 1$. Dans ces deux cas, n représente le numéro de la figure concernée. Ces deux expressions permettent de trouver le nombre de cure-dents pour n'importe quelle figure. Dans le premier cas ($4 + 3(n - 1)$), l'élève réalise qu'il y a quatre cure-dents dans le premier assemblage et que trois cure-dents sont ajoutés à chaque nouvel assemblage. La formule est donc développée à partir de ce constat. Dans le deuxième cas, l'expression $3n + 1$ peut être obtenue d'au moins deux façons. En premier lieu, les élèves peuvent considérer les assemblages de départ et conclure que pour former chaque carré, ils ont besoin de trois cure-dents et qu'il faut un cure-dent de plus pour le premier carré. Étant donné que les élèves du groupe contrôle et ceux du groupe expérimental ont déjà travaillé avec les suites cette année, il est aussi probable que ce ne soit pas autant la formation des assemblages qui soit étudiée que le lien entre le numéro de la figure et le nombre total de cure-dents. Pour trouver le nombre de cure-dents formant une figure quelconque, il faut multiplier le numéro de la figure par trois et ajouter un à la réponse obtenue. Évidemment, la formule générale ou le programme de calcul proposé par certains élèves risque d'être incorrect. Par exemple, l'expression $4n$ peut être proposée pour trouver le nombre de cure-dents nécessaires à la construction de n'importe quelle figure. Dans un tel cas, différentes interprétations peuvent être données. Premièrement, il est probable que l'assemblage des cure-dents ait mal été perçu et que l'élève s'imagine qu'à certains endroits (quand un même côté fait partie de deux carrés), des cure-dents sont superposés. Il est aussi possible que l'élève se limite à considérer l'une des propriétés du carré, soit que celui-ci possède quatre côtés, et propose ainsi l'expression $4n$ pour trouver le nombre de cure-dents présents dans une figure quelconque. Dans un tel cas, les assemblages ne sont pas pris en compte dans le développement de la solution.

Le deuxième problème proposé aux élèves dans le prétest les amène à comparer et à classer plusieurs solutions proposées à un même problème et représentant différents types de preuves (figure 11, p. 87)[58]. Lors de la complétion de cette tâche, les élèves se trouvent en phase d'action lorsqu'ils ont à évaluer la justesse et la pertinence des arguments de preuves énoncés dans ces six solutions en les classant de la plus convaincante à la moins convaincante. Ils doivent par la suite expliquer leur réponse. Conséquemment, ce problème vise à amener les élèves à mettre en œuvre leurs propres règles de logique, règles associées à un savoir protomathématique. À cette étape, les élèves se retrouvent davantage en phase de formulation qu'en phase d'action.

[58] En raison d'un problème de mise en page, la disposition de la solution 4 est incorrecte. La solution originale est composée de deux colonnes, présentant chacune trois additions (et non d'une seule colonne présentant des additions contenant des erreurs). Ce problème est pris en charge lors de la première activité.

<u>Problème 2 : Qui a réussi à te convaincre?</u> (adapté de Healy et Hoyles, 2000, p. 400)

On demande à quelques élèves de dire si cette phrase est vraie :
« ***Quand on additionne deux nombres pairs (peu importe lesquels), la réponse est toujours paire.*** »

Pré(Ind)-2a :
Les solutions données par les élèves sont présentées ci-dessous. Classe ces solutions **de la plus convaincante à la moins convaincante**.

	1^{er} rang : La plus convaincante	2^{e} rang	3^{e} rang	4^{e} rang	5^{e} rang : La moins convaincante
# de la solution					

Solution 1

Arthur répond :
Un nombre pair est multiple de 2 et peut être écrit sous la forme 2n
2a est un nombre pair quelconque
2b est un nombre pair quelconque
2a + 2b = 2(a + b) → par mise en évidence
2(a + b) est un nombre pair

Arthur affirme donc que c'est vrai.

Solution 2

Éric répond :
2 est le plus petit nombre pair positif non nul connu
-24680 est un nombre pair négatif formé de tous les chiffres pairs (0, 2, 4, 6 et 8)
-24680 + 2 = -24678
-24678 est un nombre pair
Si ça fonctionne pour ces deux nombres, ça fonctionne pour tous les nombres pairs.

Éric affirme donc que c'est vrai.

Solution 3

Ceri répond :
Les nombres pairs sont des nombres entiers qui peuvent être divisés par 2 (et il n'y a pas de reste). Quand on additionne des nombres avec un facteur commun, 2 dans ce cas-ci, la réponse va avoir le même facteur commun.

Ceri affirme donc que c'est vrai.

Solution 4

Bonnie répond :
2 + 2 = 4 4 + 2 = 6
2 + 4 = 6 4 + 4 = 8
2 + 6 = 8 4 + 6 = 10

Bonnie affirme donc que c'est vrai.

Solution 5

Yvonne répond :
••••••••• ••••
••••••••• ••••
=
•••••••••••••
•••••••••••••

Yvonne affirme donc que c'est vrai.

Pré(Ind)-2b :
Pourquoi as-tu classé les solutions de cette façon? Pour chaque solution, explique ce qui est bon et ce qui est moins bon.

Figure 11. Prétest – Problème 2 : Qui a réussi à te convaincre?

La première solution proposée par Arthur représente une preuve algébrique pouvant être associée au calcul sur les énoncés et plus précisément à la démonstration. L'énoncé fait appel à la définition d'un nombre pair et les énoncés qui suivent en découlent. La solution 2 (celle d'Éric) est également une preuve algébrique, mais est associée à l'expérience cruciale. À partir d'un cas limite, Éric tente de prouver la véracité de la conjecture. Il cherche à illustrer le fait que si son raisonnement est correct pour ce cas limite, il le sera dans tous les cas. La troisième solution (celle de Ceri) est présentée en mots et peut être associée à l'expérience mentale. L'action est alors intériorisée et la preuve est fondée sur des théorèmes-en-acte. La solution suggérée par Bonnie (solution 4) est une preuve arithmétique présentant un exemple d'empirisme naïf. En effet, la conclusion est tirée à partir de quelques exemples concrets. Enfin, la solution 5 (celle d'Yvonne) est une preuve visuelle. Le dessin d'Yvonne pouvant s'appliquer à tous les nombres pairs (tout nombre pair *p* être représenté par $2n$, il peut également être illustré par un ou plusieurs ensembles de « couples de points »), la preuve développée représente un exemple générique. Les élèves doivent comparer ces cinq solutions et les classer de la plus convaincante à la moins convaincante. Le classement suggéré pour les cinq solutions de ce problème est présenté à la figure 12 (p. 88) et s'inspire de la typologie de preuves développées par Balacheff (1987).

Solution de la question Pré(Ind)-2a

	1er rang : La plus convaincante	2^{e} rang	3^{e} rang	4^{e} rang	5^{e} rang : La moins convaincante
# de la solution	1	3	5	2	4

Figure 12. Solution de la question Pré(Ind)-2a

Les preuves occupant les deux premiers rangs représentent des preuves intellectuelles. Au premier rang se retrouve la solution 1, présentée par Arthur et en lien avec le calcul sur les énoncés. C'est une démonstration mathématique typique. Conséquemment, du point de vue de la communauté mathématique, elle représente la preuve intellectuelle la plus convaincante dans la typologie de Balacheff. Au deuxième rang suit la solution 3, reliée à l'expérience mentale. Bien que cette preuve soit généralisable et fasse appel à des propriétés mathématiques, elle ne fait pas preuve d'autant de formalisme que la solution 1 dans sa présentation. C'est la principale distinction qui peut être faite entre ces solutions. Les preuves 2, 4 et 5 sont des preuves pragmatiques. La plus convaincante, d'un point de vue de mathématicien, est la solution 5, car elle est permet de généraliser le résultat à tous les nombres pairs. La solution de Bonnie (solution 4) est strictement empirique et l'énoncé n'est vérifié que pour quelques cas. Cette solution est nécessairement la moins convaincante. Enfin, dans la solution 2, la question de généralité est posée à travers l'étude de cas limites. Bien que cette preuve soit aussi empirique, le fait qu'elle pose la question de généralité la rend plus convaincante que la solution 4.

Le classement proposé par les élèves peut différer de celui présenté à la figure 12 (p. 88). Lorsqu'ils développent des preuves, les élèves favorisent les preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles (Arsac *et al.*, 1992; Chazan, 1993; Dreyfus, 1999; Healy et Hoyles, 2000; Simon, 2000; Weber, 2001). Or, ce n'est pas nécessairement le cas lorsqu'ils évaluent des preuves. En effet, Healy et Hoyles (2000) montrent que pour certains élèves, moins ils comprennent une preuve, plus ils la jugent convaincante. Nous pouvons supposer que les solutions 1 et 3 paraissent plus compliquées pour les élèves et donc que ces derniers les placent aux deux premiers rangs (comme nous l'avons fait). Or, ces auteurs observent également que les données empiriques semblent davantage convaincre les élèves que les mots ou les images. Si tel est le cas, ce sont les solutions 2 et 4 qui sont jugées plus convaincantes lors du classement.

Le dernier problème présenté aux élèves dans le prétest vise le développement d'une preuve. Un énoncé leur est présenté et les élèves doivent préciser si cet énoncé est vrai ou faux (figure 13, p. 89).

Problème 3 : Deux nombres impairs consécutifs (Arsac *et al.*, 1992, p. 122)

Lis attentivement l'énoncé ci-dessous :

La somme de deux nombres impairs consécutifs est toujours multiple de 4.

Pré(Ind)-3 :
Cet énoncé est-il vrai ou faux? Justifie ta réponse.

Figure 13. Prétest – Problème 3 : Deux nombres impairs consécutifs

Cette question fait appel à un savoir mathématique, car les élèves doivent utiliser des propriétés mathématiques afin de prouver que la conjecture est vraie. Ils ne peuvent pas se limiter à faire quelques exemples, car un tel type de preuves est dépourvu de caractère de généralité. La réponse suggérée ne s'applique alors qu'aux quelques cas présentés. Ce problème vise donc à amener les élèves à réaliser que pour prouver qu'un énoncé est toujours vrai, ils doivent s'appuyer sur des propriétés[59]. La solution présentée à la figure 14 (p. 90) peut être acceptée.

Première solution proposée au problème 3 : Deux nombres impairs consécutifs

Tout nombre pair peut être représenté par $2x$
Tout nombre impair peut être représenté par $2x + 1$

Deux nombres impairs consécutifs peuvent être représentés par $2x + 1$ et $2x + 3$

$(2x + 1) + (2x + 3) = 4x + 4 = 4\ (x + 4)$
$4\ (x + 4)$ est un multiple de 4

La somme de deux nombres impairs consécutifs est toujours un multiple de 4.

Figure 14. Première solution proposée à la question Pré(Ind)-3

Évidemment, d'autres solutions sont également possibles. Par exemple, un élève peut représenter les deux nombres impairs consécutifs par $2x - 1$ et $2x + 1$. Il obtient alors la solution présentée à la figure 15 (p. 91). Le raisonnement exposé dans cette solution est le même que celui exposé dans la solution précédente. Ce n'est que l'écriture utilisée qui change.

[59] En lien avec la règle des propriétés mathématiques.

<u>Deuxième solution proposée au problème 3 : Deux nombres impairs consécutifs</u>

Tout nombre pair peut être représenté par $2x$
Tout nombre impair peut être représenté par $2x - 1$ ou par $2x + 1$

Deux nombres impairs consécutifs peuvent être représentés par $2x - 1$ et $2x + 1$

$(2x - 1) + (2x + 1) = 4x$
$4x$ est un multiple de 4

La somme de deux nombres impairs consécutifs est toujours un multiple de 4.

Figure 15. Deuxième solution proposée à la question Pré(Ind)-3

3. 1.1.2 Activité 1

Le prétest a une double fonction. En premier lieu, il permet d'évaluer les connaissances des élèves en lien avec le développement et l'évaluation de preuves au début du projet, puis il sert de tremplin pour l'expérimentation, car les problèmes du prétest sont réinjectés dans la première activité mathématique[60]. Ainsi, la première activité est construite de façon à permettre aux élèves de faire un retour sur des problèmes du prétest et donc d'échanger sur des solutions qui existent déjà. Avant tout, afin de prendre en charge la disposition incorrecte de la solution 4 présentée dans le problème 2, un retour individuel est fait sur le classement suggéré au départ. Ce retour se fait après que les enseignants aient précisé aux élèves que la solution est composée de deux colonnes de calculs. Les élèves ont alors la chance de modifier leur classement original (figure 16, p. 92).

[60] Étant donné qu'il y a de très fortes chances que les élèves du groupe expérimental n'aient jamais utilisé un forum électronique dans un contexte mathématique, il semble pertinent que le premier problème dont ils auront à discuter dans l'outil de communication en ligne soit un problème avec lequel ils sont déjà familiarisés. De cette façon, la double appropriation (du contenu mathématique et de l'outil technologique) est évitée.

<u>Problème 2 : Qui a réussi à te convaincre?</u>

Act1(Ind)-2 :
Que penses-tu du classement que tu as suggéré au départ (sur le prétest)? Est-il correct? Dois-tu y apporter des changements? Explique ta réponse.

Figure 16. Activité 1 (Individuel) – Problème 2 : Qui a réussi à te convaincre

Après coup, pour faire suite au premier problème du prétest, les élèves sont invités à échanger sur les différentes solutions trouvées à la question *Pré(Ind)-1b* afin de déterminer lesquelles doivent être retenues (figure 17, p. 92).

<u>Problème 1 : Le nombre de cure-dents</u> (adapté de Elchuck *et al.*, 1997a, p. 234)

À l'aide de cure-dents, on a formé cette suite de carrés.

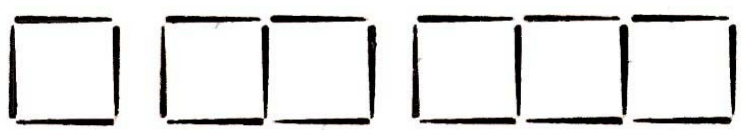


Figure n° 1 Figure n° 2 Figure n° 3

Act1(Eq)-1a :
Parmi les solutions proposées par vos collègues du N.-B. et du Qc, lesquelles avez-vous retenues? Expliquez votre réponse.

Act1(Eq)-1b :
Parmi les solutions proposées par vos collègues du N.-B. et du Qc, lesquelles avez-vous rejetées? Expliquez votre réponse.

Figure 17. Activité 1 (Équipe) – Problème 1 : Le nombre de cure-dents

Un minimum de six productions d'élèves est sélectionné parmi l'ensemble des solutions proposées par les élèves des deux groupes[61]. Ces productions sont choisies de façon à ce que des solutions empiriques et des solutions qui présentent un caractère plus intellectuel soient représentées, afin que le type de solution le plus apprécié par les élèves

[61] Les solutions retenues sont présentées à la section *4.6.2.1 Méthodes utilisées par les élèves (Pre(Ind)-1b), et solutions retenues et rejetées par les élèves pendant l'enseignement (Act1(Eq)-1a et Act1(Eq)-1b)* (p. 263).

ne soit pas influencé par la présence ou l'absence d'un type de travail au sein de l'ensemble des solutions. Elles sont ensuite présentées à l'ensemble des élèves afin de les amener à les classer de la plus convaincante à la moins convaincante. Un tel exercice nous permet de comparer les types de travail que les élèves privilégient lorsqu'ils développent des solutions aux types qu'ils préfèrent lorsqu'ils doivent évaluer différentes solutions. Cinq de ces productions présentent un travail sans erreur, alors que la sixième production est erronée. Au besoin, d'autres productions d'élèves peuvent être retenues. Par exemple, si deux solutions présentent une expression algébrique, mais que les expressions exposées dans chacune de ces solutions sont différentes[62], il peut être intéressant de présenter ces deux solutions aux élèves, car bien qu'elles soient mathématiquement équivalentes, elles n'ont pas la même forme aux yeux des élèves. Ils se retrouvent donc avec des problèmes d'équivalence de formules algébriques.

Plusieurs expressions mathématiques permettent de répondre à cette question. Par exemple, l'utilisation des expressions $3n + 1$ et $4 + 3(n - 1)$ mène à une réponse correcte. Évidemment, toutes les expressions algébriques qui sont mathématiquement équivalentes à $3n + 1$ doivent être retenues, car nous ne précisons aucunement que nous sommes à la recherche d'une expression réduite. Cette tâche fait appel à deux phases différentes pour les élèves. Par exemple, il est possible que les élèves aient à poser des questions afin de s'assurer de bien comprendre les solutions soumises. Tous commentaires ou toutes questions visant à clarifier certains éléments en lien avec les preuves développées placent les élèves en phase de formulation. Lorsque ces derniers évaluent dans quelle mesure les expressions algébriques proposées modélisent ou non la situation initiale, ils se retrouvent dans une phase de validation algébrique. Dans les deux cas, les échanges reposent sur un savoir algébrique et donc mathématique.

La première activité permet également de faire un retour sur le deuxième problème du prétest. Afin de mettre en pratique des règles de logique, la deuxième partie de cette activité (figure 18, p. 94) vise à amener les élèves à discuter du classement qu'ils ont établi lorsqu'ils ont répondu à la question *Pré(Ind)-2a*. Ils doivent suggérer un nouveau classement déterminé par l'équipe, s'il y a lieu, et expliquer les changements apportés entre le classement initial de chacun et le nouveau classement de l'équipe. En dernier lieu, ils peuvent suggérer un dernier classement final. Cette question a été ajoutée afin de permettre

[62] Entre autres, il est possible que les élèves suggèrent les deux expressions suivantes : $3n + 1$ et $4 + 3(n\text{-}1)$.

aux élèves, suite à la discussion des éléments qui ont été modifiés (question *Act1(Eq)-2b*), de modifier le classement proposé à la question *Act1(Eq)-2a*.

Si nous considérons que les solutions proposées ont le potentiel de preuves, le classement de celles-ci selon leur « potentiel de convaincre » ainsi que la justification de ce classement par les élèves nous mènent à identifier des critères de validation permettant aux élèves d'évaluer une preuve. L'objet de savoir étant cette fois des critères de validation, le savoir en jeu est protomathématique. Lors des échanges sur le classement, les élèves se retrouvent dans une phase de formulation. Toutefois, lorsque les échanges touchent davantage les règles de validation utilisées pour établir un classement, ils se retrouvent en phase de validation. Dans cette activité, l'appréciation des arguments se fait à travers l'évaluation et la comparaison de solutions.

<u>Problème 2 : Qui a réussi à te convaincre?</u>

Act1(Eq)-2a :
Les solutions données par les élèves sont présentées ci-dessous. Classez ces solutions **de la plus convaincante à la moins convaincante**.

	1er rang : La plus convaincante	2e rang	3e rang	4e rang	5e rang : La moins convaincante
# de la solution					

Act1(Eq)-2b :
Par rapport au classement suggéré par chacun au départ, quels principaux changements ont été apportés? Pourquoi? Expliquez votre réponse.

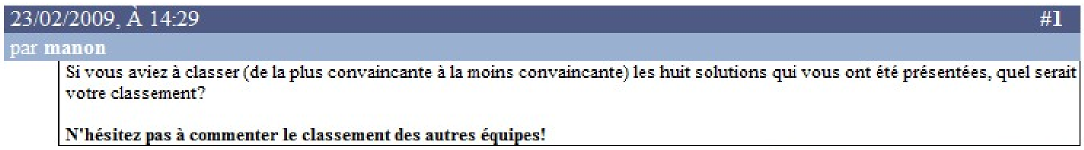
Act1(Eq)-2c :
Quel est le classement final que vous suggérez?

	1er rang : La plus convaincante	2e rang	3e rang	4e rang	5e rang : La moins convaincante
# de la solution					

Figure 18. Activité 1 (Équipe) – Problème 2 : Qui a réussi à te convaincre?

Les élèves du groupe contrôle ont 45 minutes pour réaliser cette activité (retour sur les problèmes 1 et 2) en salle de classe. Les élèves du groupe expérimental, de leur côté, échangent en classe pendant 15 minutes puis se rendent dans le forum électronique pendant

30 minutes afin de partager leurs solutions et commenter celles des autres. Un premier message est publié en ligne afin d'amener les élèves à proposer un classement pour les huit solutions qui leur sont présentées (figure 19, p. 95).



23/02/2009, À 14:29 #1

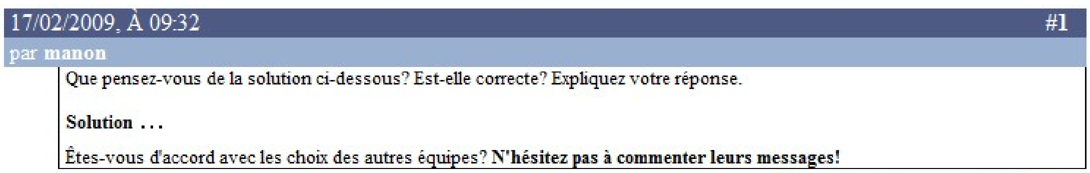
par **manon**

Si vous aviez à classer (de la plus convaincante à la moins convaincante) les huit solutions qui vous ont été présentées, quel serait votre classement?

N'hésitez pas à commenter le classement des autres équipes!

Figure 19. Message dans le forum : Act1(f)-1

Huit messages, de la forme du message présenté à la figure 20 (p. 95), sont aussi publiés afin d'encourager les élèves à commenter de façon plus particulière chacune des solutions[63].



17/02/2009, À 09:32 #1

par **manon**

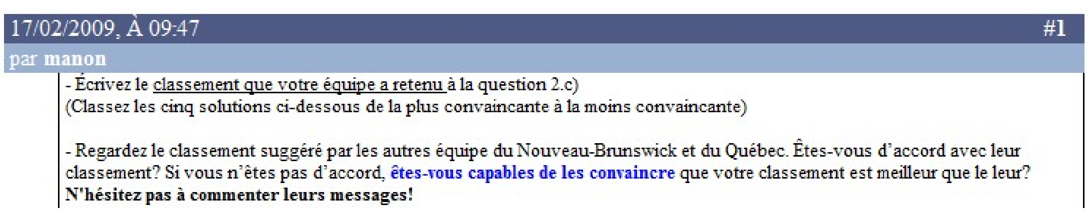
Que pensez-vous de la solution ci-dessous? Est-elle correcte? Expliquez votre réponse.

Solution ...

Êtes-vous d'accord avec les choix des autres équipes? **N'hésitez pas à commenter leurs messages!**

Figure 20. Message dans le forum : Act1(f)-1a et Act1(f)-1b

Un retour en ligne, touchant le deuxième problème, est aussi prévu pour les élèves du groupe expérimental. Ceux-ci sont invités à présenter le classement retenu par leur équipe à la question *Act1(Eq)-2c*[64] et à commenter le classement suggéré en ligne par leurs pairs du Nouveau-Brunswick et du Québec (figure 21, p. 95).



17/02/2009, À 09:47 #1

par **manon**

- Écrivez le classement que votre équipe a retenu à la question 2.c)
(Classez les cinq solutions ci-dessous de la plus convaincante à la moins convaincante)

- Regardez le classement suggéré par les autres équipe du Nouveau-Brunswick et du Québec. Êtes-vous d'accord avec leur classement? Si vous n'êtes pas d'accord, **êtes-vous capables de les convaincre** que votre classement est meilleur que le leur?
N'hésitez pas à commenter leurs messages!

Figure 21. Message dans le forum : Act1(f)-2c

---

[63] Chaque solution fait partie du message qui lui est propre (elle est présentée entre les deux questions). Les huit solutions retenues sont présentées à la section *4.6.2.1 Méthodes utilisées par les élèves (Pre(Ind)-1b), et solutions retenues et rejetées par les élèves pendant l'enseignement (Act1(Eq)-1a et Act1(Eq)-1b)* (p. 263).

[64] Le nom des questions dans les captures d'écran ne coïncide pas exactement au nom des questions dans le texte, mais ce sont bel et bien les mêmes questions qui sont touchées. Lors de la présentation des différentes activités aux élèves, les numéros de chaque question ont été simplifiés.

3. 1.1.3 Activité 2

Dans la deuxième activité, deux nouveaux problèmes sont présentés aux élèves. La tâche à effectuer pour chacun de ces problèmes est la même. Premièrement, une conjecture leur est présentée et ils doivent identifier si cette dernière est vraie ou fausse. Ils se retrouvent donc en situation d'action et le savoir en jeu est mathématique. Ce travail est effectué individuellement en salle de classe. C'est à travers la résolution de ces problèmes, et par le fait même le développement de preuves, que nous sommes en mesure d'identifier les types de preuves développées par les élèves lorsqu'ils se trouvent en situation de validation algébrique. Ces deux problèmes nous permettent également d'observer les règles du débat mathématique respectées par les élèves lorsqu'ils développent une preuve en lien avec un problème algébrique.

Le premier problème de l'activité 2, le problème 4 (figure 22, p. 96), a pour objectif d'amener les élèves à réaliser qu'un contre-exemple suffit pour prouver qu'un énoncé mathématique est faux et que plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé est vrai[65].

Problème 4 : Bonne question! (adapté d'Arsac *et al.*, 1992, p. 25)

Dans l'expression $n \times n - n + 11$, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre premier?

Act2(Ind)-4 :
Quelle réponse proposes-tu à cette question? Explique pourquoi.

Figure 22. Activité 2 (Individuel) – Problème 4 : Bonne question!

Dans ce cas-ci, la conjecture est vraie pour $n = 0, 1, 2 \ldots, 10$ mais pas pour $n = 11$ (on obtient alors $121 = 11^2$, qui n'est pas un nombre premier). Arsac et al. (1992) précisent trois cas différents pouvant se produire lors de la résolution de ce problème : 1) tous les élèves affirment qu'on obtient toujours un nombre premier; 2) certains élèves affirment qu'on obtient toujours un nombre premier tandis que d'autres croient que non et 3) tous les élèves croient que la réponse obtenue ne sera pas toujours un nombre premier. Lors de leur

[65] En lien, respectivement, avec la règle du débat mathématique du contre-exemple et avec la règle des exemples.

expérimentation, certains élèves affirment que la réponse est toujours un nombre premier tandis que d'autres croient que non. À la question « dans l'expression $n \times n - n + 11$, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre qui a seulement deux diviseurs? », plusieurs élèves ayant répondu « oui » sont convaincus après avoir fait quelques essais non systématiques. Parmi les élèves qui font le calcul en remplaçant n par 11, deux réactions sont observées. Dans le premier cas, les élèves considèrent cet exemple comme un contre-exemple et confirment que le nombre obtenu ne sera pas toujours premier. Dans le deuxième cas, les élèves considèrent 11 comme un nombre exceptionnel et concluent que la réponse à la question est parfois « vrai », parfois « faux » (le rôle du contre-exemple en mathématiques n'est alors pas réellement compris). Le deuxième problème faisant partie de cette activité est présenté à la figure 23 (p. 97).

Problème 5 : Vrai ou faux? (adapté d'Arsac *et al.*, 1992, p. 122)

Tous les nombres entiers divisibles par 10 sont divisibles par 5. Cette affirmation est-elle vraie ou fausse?

Act2(Ind)-5 :
Quelle réponse proposes-tu à cette question? Explique pourquoi.

Figure 23. Activité 2 (Individuel) – Problème 5 : Vrai ou faux?

Dans ce cas-ci, la conjecture est vraie. Les élèves ne peuvent toutefois pas se limiter à faire quelques exemples pour le prouver. Ainsi, la résolution de ce problème vise principalement à amener les élèves à réaliser que pour prouver qu'un énoncé est toujours vrai, ils doivent s'appuyer sur des propriétés[66]. Par exemple, la solution présentée à la figure 24 (p. 98) peut être acceptée.

Certains élèves peuvent tout simplement conclure que l'affirmation est vraie parce que 10 est divisible par 5. Une telle conclusion ne contient aucune erreur de raisonnement, mais n'est tout de même pas suffisamment complète pour être considérée comme un calcul sur les énoncés. Un raisonnement plus complet est présenté à la figure 25 (p. 98).

---

[66] En lien avec la règle des propriétés mathématiques.

<u>Première solution proposée au problème 5 : Vrai ou faux?</u>

Soit x un nombre entier
Les nombres entiers divisibles par 10 peuvent être représentés par l'expression $10n$, où $n \varepsilon$ N.
$10n = 5 \times 2 \times n$
$10n = 5 \times 2n$
$10n = 5 \times m \quad m = 2n$

Comme $10n = 5m$ = le nombre initial, alors le nombre initial divisible par 10 est aussi nécessairement divisible par 5.

Figure 24. Première solution proposée à la question Act2(Ind)-5

<u>Deuxième solution proposée au problème 5 : Vrai ou faux?</u>

Soit x un nombre entier divisible par 10.

x est divisible par 10 (par définition)
10 est divisible par 5 (10/5 = 2)
Donc x est divisible par 5

Tous les nombres entiers divisibles par 10 sont divisibles par 5.

Figure 25. Deuxième solution proposée à la question Act2(Ind)-5

Tout comme Arsac et al. (1992) l'ont observé lorsqu'ils ont posé le Problème 3 (*Bonne question!*) aux élèves, il est fort probable que plusieurs élèves se limitent à faire quelques calculs non systématiques pour ensuite conclure que l'affirmation est vraie. Bien que la réponse finale donnée soit correcte, la solution ne peut être considérée comme complète. Effectivement, en développant une telle preuve, les élèves se situent au niveau de l'empirisme naïf et ne respectent pas la règle du débat mathématique en lien avec l'utilisation de propriétés mathématiques ou encore la règle des exemples.

Après avoir résolu ces problèmes, les élèves sont invités à échanger sur les différentes solutions trouvées par leurs pairs. Ces échanges nous permettent d'observer si les règles du débat mathématique auxquelles les élèves font appel pour évaluer les preuves des autres sont les mêmes que celles utilisées lorsqu'ils ont à développer des preuves. Les questions qui leur sont posées sont présentées aux figures 26 (p. 99) et 27 (p. 99).

<u>Problème 4 : Bonne question?</u>

Act2(Eq)-4a :
Parmi les explications proposées par les membres de votre équipe, lesquelles retenez-vous? Justifiez vos choix.

Act2(Eq)-4b :
Parmi les explications proposées par les membres de votre équipe, lesquelles rejetez-vous? Justifiez vos choix.

Figure 26. Activité 2 (Équipe) – Problème 4 : Bonne question!

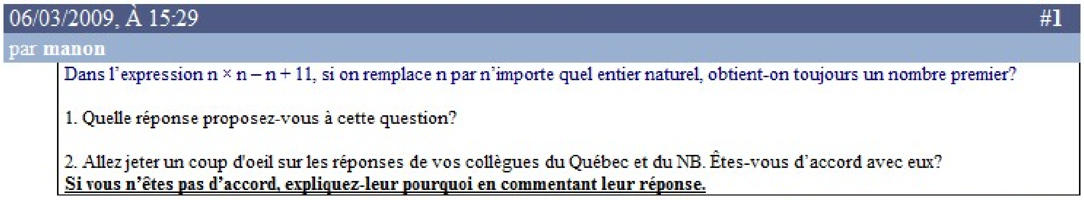
<u>Problème 5 : Vrai ou faux?</u>

Act2(Eq)-5a :
Parmi les explications proposées par les membres de votre équipe, lesquelles retenez-vous? Justifiez vos choix.

Act2(Eq)-5b :
Parmi les explications proposées par les membres de votre équipe, lesquelles rejetez-vous? Justifiez vos choix.

Figure 27. Activité 2 (Équipe) – Problème 5 : Vrai ou faux?

Au total, les élèves ont 60 minutes pour répondre à l'ensemble de ces questions (travail individuel et travail d'équipe). Les élèves du groupe expérimental passent la moitié de ce temps en salle de classe et l'autre moitié dans le forum électronique. Pour cette activité, deux messages sont publiés dans le forum. Le premier encourage les élèves à partager la solution trouvée à la question *Act2(Ind)-4*. Les élèves sont également invités à commenter les solutions proposées par leurs pairs du Nouveau-Brunswick et du Québec en précisant s'ils sont d'accord ou non avec leurs solutions. Ils doivent justifier leur choix, plus particulièrement s'ils ne sont pas d'accord, en précisant pourquoi la réponse ne leur convient pas (figure 28, p. 100).


06/03/2009, À 15:29 #1

par **manon**

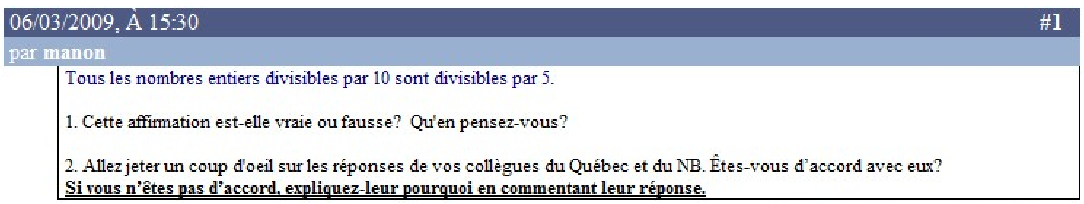
Dans l'expression n × n – n + 11, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre premier?

1. Quelle réponse proposez-vous à cette question?

2. Allez jeter un coup d'oeil sur les réponses de vos collègues du Québec et du NB. Êtes-vous d'accord avec eux?
Si vous n'êtes pas d'accord, expliquez-leur pourquoi en commentant leur réponse.

Figure 28. Message dans le forum : Act2(Ind)-4

Le deuxième message publié dans le forum électronique est sensiblement le même que celui décrit ci-dessus, sauf qu'il concerne la question *Act2(Ind)-5* (figure 29, p. 100).


06/03/2009, À 15:30 #1

par **manon**

Tous les nombres entiers divisibles par 10 sont divisibles par 5.

1. Cette affirmation est-elle vraie ou fausse? Qu'en pensez-vous?

2. Allez jeter un coup d'oeil sur les réponses de vos collègues du Québec et du NB. Êtes-vous d'accord avec eux?
Si vous n'êtes pas d'accord, expliquez-leur pourquoi en commentant leur réponse.

Figure 29. Message dans le forum : Act2(Ind)-5

3. 1.1.4 Activité 3

La troisième activité est divisée en deux parties. La première partie consiste en un devoir (version papier) à compléter à la maison où deux preuves sont proposées au problème 6 (figure 30, p. 101).

Les deux preuves présentées sont différentes et conduisent à des réponses contradictoires. Dans la phase d'action, les élèves doivent identifier, individuellement, qui des deux élèves a raison ou encore s'ils ont tous les deux raison ou tort. Ils doivent ensuite expliquer leur réponse. Ce problème, expérimenté par Arsac et al. (1992) auprès d'élèves de 11 et 12 ans, vise deux objectifs :

- « Tester la conception mathématique du vrai et du faux en mathématiques » (p. 132 - 133) grâce au choix de réponses permettant aux élèves d'identifier à la fois la solution de Pierre et celle de Paul comme étant correctes.
- Vérifier le statut qu'a le contre-exemple pour les élèves en opposant une série d'exemples à un contre-exemple.

<u>Problème 6 : Pierre et Paul</u> (Arsac *et al*., 1992, p. 132-133)

On demande à Pierre et à Paul de dire si cette phrase est vraie :

« ***Quels que soient les deux nombres strictement positifs que je choisis, leur produit est supérieur ou égal à chacun des deux nombres.*** »

Pierre répond : « cette phrase est vraie, car :

Si je prends 3 et 2, le produit est 6 et 6 > 3 et 6 > 2.
Si je prends 1,3 et 5, le produit est 6,5 et 6,5 > 1,3 et 6,5 > 5.
Si je prends 4,8 et 150, le produit est 720, il est plus grand que 4,8 et 150.
Si je prends 11,2 et 4, le produit est 44,8, il est plus grand que 3,4 et 6.

Tu vois, le produit est toujours plus grand que les nombres que j'ai choisis au départ, donc la phrase est vraie. »

Paul répond : « cette phrase est fausse, car :

Si je prends 4 et 0,3, le produit est égal à 1,2 et 1,2 < 4. »

Act3(Ind)-6a :
Parmi les réponses suivantes, coche celle qui t'apparaît la plus appropriée :

Pierre a raison et Paul a tort :	☐
Paul a raison et Pierre a tort :	☐
Ni Paul ni Pierre n'ont raison :	☐
Pierre et Paul ont raison tous les deux :	☐

Act3(Ind)-6b :

a) Quels arguments proposes-tu pour appuyer ton choix de réponse? Autre dit, qu'est-ce qui te permet de dire que quelqu'un a raison ou que quelqu'un a tort?

Figure 30. Activité 3 (Devoir individuel) – Problème 6 : Pierre et Paul

Dans la première partie de cette activité, étant donné que les élèves analysent deux solutions mathématiques, le savoir en jeu est mathématique. L'étude des explications soumises par les élèves nous permet de vérifier les règles du débat mathématique utilisées par les élèves pour valider ou invalider une preuve. La réponse correcte à ce problème est « Paul a raison et Pierre a tort ». Ainsi, le simple contre-exemple fourni par Paul suffit pour invalider l'affirmation. Pierre, de son côté, propose plusieurs calculs qui valident l'affirmation, mais sa solution demeure toutefois incorrecte. En effet, l'affirmation est fausse lorsqu'on multiplie un nombre entier positif et un nombre rationnel positif plus petit qu'un. Pierre n'a considéré que les nombres supérieurs à 1 et ne s'est donc pas rendu compte de l'existence de contre-exemples. Lors de leur expérimentation, les auteurs ont remarqué qu'une masse assez importante d'élèves[67], soit 41 %, pensent que Pierre et Paul ont raison tous les deux. Cette réponse peut être expliquée en partie par le fait que certains élèves interprètent mal la question et associent le fait d'avoir raison au fait de ne pas avoir fait de fautes dans leur raisonnement. Ainsi, plusieurs élèves affirment que Pierre et Paul ont tous les deux raison, mais les arguments utilisés par ces élèves pour justifier leur réponse ne sont pas nécessairement en lien avec le contenu des justifications présentées dans les solutions de ces deux élèves fictifs.

La deuxième partie de cette activité consiste en un échange sur les arguments de validation retenus par les élèves lors de l'explication de leur réponse à la question *Act3(Ind)-6b*. Les élèves doivent alors suivre la démarche indiquée à la figure 31 (p. 102). Le tableau à remplir[68] se trouve à la page 103 (figure 32).

Act3(Eq)-6a :
À partir des arguments donnés par chacun des membres de votre équipe lors du travail individuel, complétez le tableau à la page suivante en indiquant les arguments donnés par chaque élève pour dire que quelqu'un a raison ou que quelqu'un a tort.
Note : Il y aura nécessairement des cellules vides dans votre tableau.

***** REMPLIR LE TABLEAU *****

Act3(Eq)-6b :
Il y aura sans doute des arguments avec lesquels vous ne serez pas tous d'accord.
Pour nous indiquer dans quelle mesure vous êtes d'accord ou non avec chacun des arguments, inscrivez à l'intérieur de chaque cellule (dans le rectangle gris) le nombre d'élèves de votre équipe qui sont **d'accord** avec l'argument de cette cellule.
(Si une cellule est vide, n'inscrivez rien dans le rectangle gris.)

Figure 31. Activité 3 (Équipe) – Problème 6 : Pierre et Paul

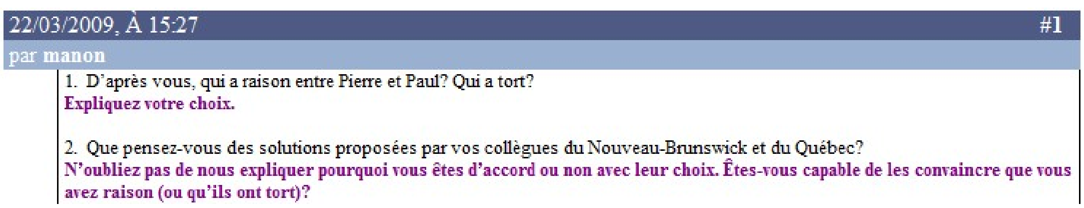
[67] Les auteurs ne précisent pas le nombre d'élèves qui ont participé à leur étude. Ils soulignent toutefois que leur dispositif concerne cinq classes de cinquième (l'équivalent du secondaire 1 au Québec).
[68] Pour des raisons de mise en page, le tableau original a été réduit. Par conséquent, le tableau remis aux élèves lors de la troisième activité est un peu plus grand que celui présenté dans ce texte.

	Vos arguments pour dire que **Pierre a raison**	Vos arguments pour dire que **Paul a raison**	Vos arguments pour dire que **Pierre a tort**	Vos arguments pour dire que **Paul a tort**
Élève 1				
Élève 2				
Élève 3				
Élève 4				

Figure 32. Activité 3 (Équipe) – Tableau à remplir à la question Act3(Eq)-6b

Lors de ces échanges, les élèves se trouvent en phase de formulation. Lorsque ces échanges touchent spécifiquement la validation des règles de logique énoncées, ils se retrouvent en phase de validation. Étant donné que les élèves ont à évaluer non pas des solutions mathématiques, mais bien des arguments de preuves, le savoir en jeu est protomathématique.

Vu que la première partie de cette activité consiste en un devoir, il n'est pas nécessaire de prévoir du temps en salle de classe pour le compléter. Seul le travail qui se fait en équipe est effectué durant le cours de mathématiques. Les élèves des groupes contrôle et expérimental disposent chacun de 45 minutes pour répondre aux questions *Act3(Eq)-6a* et *Act3(Eq)-6b*. Les élèves du groupe expérimental passent les 15 premières minutes à échanger en classe (travail sur papier) et les 30 dernières minutes à échanger dans le forum électronique. Dans le cadre de cette activité, un seul message est publié en ligne. Il amène les élèves à publier la réponse trouvée à la question *Act3(Ind)-6a* et à commenter les solutions proposées en ligne par leurs pairs du Nouveau-Brunswick et du Québec. Dans ce cas-ci, une consigne, présentée sous forme de défi, fait partie du message. Les élèves sont questionnés afin de savoir s'ils sont capables de convaincre les autres qu'ils ont raison ou que les autres ont tort (figure 33, p. 104).


22/03/2009, À 15:27 #1
par **manon**

1. D'après vous, qui a raison entre Pierre et Paul? Qui a tort?
Expliquez votre choix.

2. Que pensez-vous des solutions proposées par vos collègues du Nouveau-Brunswick et du Québec?
N'oubliez pas de nous expliquer pourquoi vous êtes d'accord ou non avec leur choix. Êtes-vous capable de les convaincre que vous avez raison (ou qu'ils ont tort)?

Figure 33. Message dans le forum : Act3(Ind)-6a

3. 1.1.5 Activité 4

Le problème suggéré aux élèves dans la partie individuelle de la quatrième activité les place dans une phase d'action. Ils sont invités à observer trois assemblages de carreaux construits selon une certaine régularité, et à partir de cet assemblage, à déterminer le nombre de carreaux hachurés retrouvés dans la huitième figure. Ils doivent ensuite proposer un moyen pour trouver le nombre de carreaux hachurés dans n'importe quelle figure (figure 34, p. 105).

<u>Problème 7 : Les carreaux hachurés</u> (adapté d'Arsac *et al.*, 1992, p. 126)

Un carré est partagé en $n \times n$ carreaux. On hachure les carreaux qui forment le contour de chaque figure.

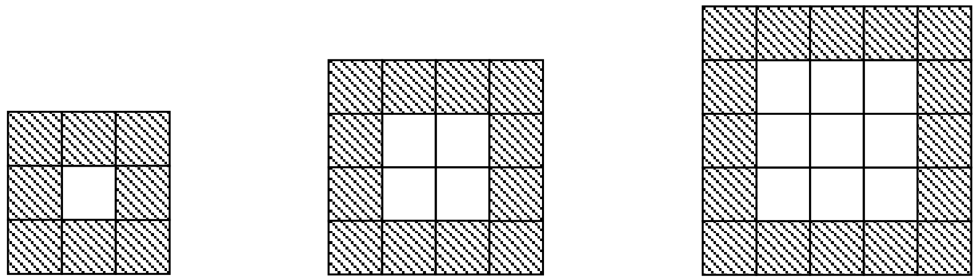


Figure n° 1 Figure n° 2 Figure n° 3

Act4(Ind)-7a :
Combien de carreaux hachurés y aura-t-il dans la figure n° 8?

Act4(Ind)-7b :
Donne une façon qui te permet de trouver le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quelle figure si elles sont toutes construites selon le même modèle.

Figure 34. Activité 4 (Individuel) – Problème 7 : Les carreaux hachurés

Comme tous les autres problèmes de régularités faisant partie du prétest et des activités, ce problème est en lien avec les suites linéaires (savoir mathématique). Les élèves peuvent y répondre en dessinant la huitième figure, en utilisant un tableau de valeurs (tableau V, p. 105) afin de trouver la régularité permettant de passer d'une figure quelconque à la figure suivante (dans ce cas-ci, additionner quatre au nombre de carreaux hachurés présents dans la figure précédente) ou encore en trouvant une formule générale permettant de calculer le nombre de carreaux hachurés dans la figure n° 8. Si leur raisonnement mathématique est correct, les élèves doivent conclure qu'il y a 28 carreaux hachurés dans la huitième figure.

Tableau V. Tableau de valeurs – Question Act4(Ind)-7a

Numéro de la figure	1	2	3	…	8
Nombre total carreaux hachurés	8	12	16	…	28

Après avoir répondu à cette première question, les élèves demeurent dans une phase d'action et ont à trouver une façon de faire qui permet d'identifier le nombre de carreaux hachurés dans n'importe quelle figure construite sous le même modèle que celui présenté dans le problème initial. Bien que certains élèves risquent de se limiter à proposer une méthode empirique (par exemple, faire un tableau de valeurs), il appert que la question *Act4(Ind)-7b* a un caractère plus général que la première question, où l'élève doit seulement trouver le nombre de carreaux hachurés dans une figure précise. Ainsi, il est souhaité que les élèves cherchent d'abord la régularité permettant de créer les assemblages de carreaux, pour ensuite proposer une formule générale ou un programme de calcul permettant de trouver le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quelle figure. L'ensemble des solutions soumises par les élèves, incluant les différentes expressions algébriques qui peuvent être utilisées pour résoudre le problème, nous permet d'identifier le genre de travail (pragmatique ou intellectuel) privilégié par les élèves. Par exemple, s'ils travaillent à partir des assemblages et considèrent que n est égal au numéro de la figure auquel on additionne 2, ils peuvent calculer le nombre total de carrés formant la figure n^2 pour ensuite soustraire la partie centrale non hachurée $(n - 2)^2$ ce qui les mène à l'expression $n^2 - (n - 2)^2$. La même formule générale peut aussi être obtenue en associant le numéro de la figure à l'expression $n - 2$. Le nombre total de carrés est encore associé à l'expression n^2, mais cette fois-ci, la partie centrale (non hachurée) est représentée par le numéro de la figure élevé au carré, soit $(n - 2)^2$. L'expression $n^2 - (n - 2)^2$ est encore une fois obtenue. Les élèves peuvent également tenter de voir la régularité entre le nombre d'unités carrées formant un côté de l'assemblage et le nombre total de carrés hachurés. Dans un tel cas, ils risquent de trouver l'expression $4n - 4$. Ces différentes expressions sont acceptées, car elles permettent toutes de trouver le nombre de carreaux hachurés dans n'importe quelle figure. Nous pouvons également nous attendre à recevoir des solutions erronées de la part des élèves. Par exemple, il est possible que ces derniers calculent le nombre de carreaux hachurés sur chaque côté du carré pour ensuite multiplier ce nombre par quatre (étant donné qu'un carré à quatre côtés). L'expression suggérée serait alors $4n$. Dans un tel cas, les carreaux se retrouvant dans les coins des carrés sont comptés deux fois. Il faut soustraire ces quatre carreaux pour obtenir une des expressions correctes, soit $4n - 4$.

Dans le cadre de la quatrième activité, le travail d'équipe se fait en deux temps. Premièrement, à la suite de la résolution individuelle de ces deux questions, les élèves sont invités à porter un regard critique sur les solutions proposées par leurs pairs. Les règles du débat mathématique auxquelles les élèves font appel pour évaluer les solutions des autres peuvent alors être observées. Les questions auxquelles les élèves doivent répondre sont présentées à la figure 35 (p. 107).

<u>Problème 7 : Les carreaux hachurés</u> Act4(Eq)-7a : Parmi les façons proposées par les membres de votre équipe, lesquelles retenez-vous? Expliquez votre réponse. Act4(Eq)-7b : Parmi les façons proposées par les membres de votre équipe, lesquelles rejetez-vous? Expliquez votre réponse.

Figure 35. Activité 4 (Équipe, partie A) – Problème 7 : Les carreaux hachurés

Dans un deuxième temps, la chercheuse sélectionne au moins six productions d'élèves parmi toutes les solutions soumises à la question *Act4(Ind)-7b*[69]. Les critères qui ont servi au choix des solutions lors de l'activité 1 sont réutilisés ici. Ainsi, des solutions empiriques et des solutions intellectuelles sont présentées aux élèves et leur tâche consiste à classer ces solutions de la plus convaincante à la moins convaincante et à expliquer les raisons qui les poussent à faire ce classement (figure 36, p. 108).

[69] Les solutions retenues sont présentées à la section *4.6.1.1 Méthodes utilisées par les élèves (Act4(Ind)-7b), classement des solutions (Act4(Eq)-7c) et justifications des élèves (Act4(Eq)-7d) pendant l'enseignement* (p. 244).

<u>Problème 7 : Les carreaux hachurés?</u>

Act4(Eq)-7c :
Observez attentivement les solutions proposées par vos collègues du Nouveau-Brunswick et du Québec. Classez ces solutions **de la plus convaincante à la moins convaincante**.

	1er rang : La plus convaincante	2^{e} rang	3^{e} rang	4^{e} rang	5^{e} rang : La moins convaincante
# de la solution					

Act4(Eq)-7d :
Pourquoi avez-vous décidé de classer les solutions de cette façon? Pour chaque solution, expliquez ce qui est bien et ce qui est moins bien.

Figure 36. Activité 4 (Équipe, partie B) – Problème 7 : Les carreaux hachurés

Parmi les solutions retenues, cinq sont mathématiquement correctes, tandis que la sixième solution présente une erreur au niveau du raisonnement. Il est possible que certaines solutions d'élèves présentent des différences au niveau du raisonnement ou de la structure. Dans un tel cas, plus de six solutions peuvent être retenues. Par exemple, les élèves peuvent utiliser plusieurs méthodes empiriques pour résoudre un tel problème. Ils peuvent utiliser un tableau de valeur, faire un dessin pour compter les carreaux hachurés, etc. Il peut être intéressant de voir les arguments soulevés par les élèves pour favoriser une façon de faire plutôt qu'une autre, lorsque les deux méthodes utilisées sont associées au même type de preuve.

Pour cette dernière activité, les élèves du groupe contrôle et les élèves du groupe expérimental disposent de 20 minutes pour répondre individuellement aux questions *Act4(Ind)-7a* et *Act4(Ind)-7b*. Le travail en équipe doit ensuite être effectué à l'intérieur de 70 minutes. Chez le groupe expérimental, ce temps est divisé en deux parties. Pendant les 40 premières minutes, les élèves échangent en salle de classe. Les 30 minutes restantes sont réservées aux échanges dans le forum électronique. Le message publié dans l'outil de communication en ligne a deux objectifs, soit amener les élèves à partager le classement sur lequel ils se sont entendus à la question *Act4(Eq)-7c* et à commenter le classement suggéré par les autres élèves du Nouveau-Brunswick et du Québec (figure 37, p. 109). Encore une fois, le défi de convaincre les autres est soulevé dans le message initial publié dans le forum électronique.

20/04/2009, À 21:37 #1

par **manon**

- Écrivez le classement que votre équipe a retenu à la question 6.e)
(Classez les cinq solutions que vous avez reçues de la plus convaincante à la moins convaincante et **expliquez vos choix**.)

- Regardez le classement suggéré par les autres équipe du Nouveau-Brunswick et du Québec. Êtes-vous d'accord avec leur classement? Si vous n'êtes pas d'accord, **êtes-vous capables de les convaincre** que votre classement est meilleur que le leur?
N'hésitez pas à commenter leurs messages!

Figure 37. Message dans le forum : Act4(Eq)-7c

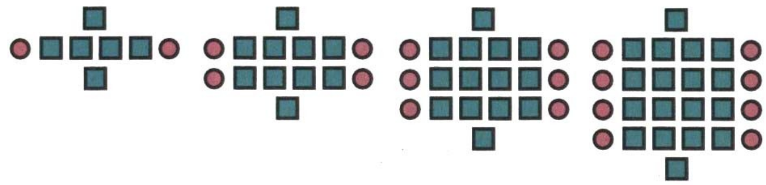
3. 1.1.6 Post-test

À la suite de l'expérimentation en salle de classe et dans le forum électronique, les élèves des deux groupes sont invités à répondre à un post-test (version papier). Le temps total réservé à l'administration du post-test est d'environ 45 minutes. Tout comme le prétest, le post-test est composé de trois problèmes devant être résolus individuellement en salle de classe. Les problèmes du post-test sont semblables à ceux du prétest afin qu'une comparaison des solutions proposées par les élèves soit possible.

Dans le premier problème proposé aux élèves, quatre assemblages, formés de carrés et de cercles, sont présentés (figure 38, p. 110). Les élèves doivent d'abord trouver le nombre de carrés dans la septième figure. Ils doivent ensuite proposer une façon de trouver le nombre de carrés dans n'importe quelle figure. Dans cette situation, les élèves sont dans une phase d'action. Bien entendu, ils peuvent utiliser différentes méthodes pour arriver à trouver le nombre de carreaux dans la septième figure. Ils peuvent, par exemple, observer le nombre de carrés qui doivent être ajoutés pour passer d'un assemblage à l'autre et faire un tableau de valeurs à partir de ce constat (tableau VI, p. 110). Dans ce cas-ci, le passage d'un assemblage à l'autre est marqué par l'ajout de quatre carrés. Les élèves peuvent aussi dessiner le septième assemblage et compter le nombre de carrés qui apparaissent dans cette figure ou encore proposer un programme de calcul plus général leur permettant de trouver le nombre de carrés pour n'importe quelle figure. Ce programme peut ensuite être utilisé pour trouver le nombre de carrés dans la figure n^{o} 7. Toutes ces façons de faire, si elles sont bien utilisées, amènent les élèves à conclure qu'il y a 30 carrés dans le septième assemblage.

<u>Problème 8 : Des cercles et des carrés</u> (adapté de Elchuck *et al.*, 1997b, p. 229)

Observe attentivement les assemblages suivants.



Post(Ind)-8a :
Combien de carrés y aura-t-il dans la figure n° 7 si on poursuit les assemblages selon la régularité utilisée ci-dessus?

Post(Ind)-8b :
Donne une façon qui te permet de trouver le nombre de carrés pour n'importe qu'elle figure.

Figure 38. Post-test-Problème 8 : Des cercles et des carrés

Tableau VI. Tableau de valeurs – Question Post(Ind)-8a

Numéro de la figure	1	2	3	…	7
Nombre total de carrés	6	10	14	…	30

Après avoir répondu à la question *Post(Ind)-8a*, les élèves doivent proposer une façon qui permet de trouver le nombre de carrés dans n'importe quelle figure. L'objectif est alors que les élèves dépassent certaines solutions empiriques (par exemple, faire le dessin de la figure recherchée et compter le nombre de carrés qui la forment) pour plutôt rechercher une régularité dans le but de proposer une formule générale ou un programme de calcul. Le savoir en jeu est encore une fois mathématique et touche les suites linéaires. Le type de travail (pragmatique ou intellectuel) favorisé par les élèves peut être identifié à travers les solutions qu'ils proposent. À cet effet, il est clair que différentes expressions mathématiques risquent d'être proposées par les élèves. Dans un premier temps, l'expression $4n + 2$, où n représente le numéro de la figure ciblée, peut être utilisée pour trouver le nombre de carrés dans n'importe quelle figure. L'élève observe que le nombre de rangés est toujours égal au numéro de la figure. Ainsi, il calcule d'abord le nombre total de carrés dans l'ensemble des rangées ($4n$), puis il ajoute les deux carrés qui se trouvent en haut et en bas de la figure. Une deuxième expression, soit $(2n + 2) + 2n$, peut également être suggérée (n représente encore le numéro de la figure). Dans ce cas-ci, l'élève calcule la partie centrale de la figure ($2n + 2$). Il additionne ensuite le nombre de carrés présents aux deux extrémités ($2n$). Ce raisonnement est présenté à la figure 39 (p, 111).

<u>Solution proposée au problème 8 : Des cercles et des carrés</u>

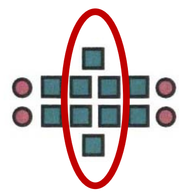
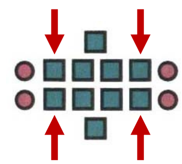
$(2n + 2) + 2n$: $(2n + 2) =$  et $2n =$ 

Figure 39. Solution proposée à la question Post(Ind)-8b

Enfin, un élève peut aussi proposer l'expression $2\ (2n) + 2$. Dans ce cas-ci, l'élève se sert des cercles pour trouver le nombre total de carrés. À l'encontre des autres expressions, n ne représente pas le numéro de la figure, mais plutôt le nombre de cercles. L'élève réalise que le nombre de cercles dans chaque figure est égal au double du numéro de la figure, soit à $2n$. De plus, il y a toujours deux fois plus de carrés que de cercles dans la partie centrale rectangulaire de la figure. Il y a donc $2\ (2n)$ carrés au centre et à cela s'ajoutent les 2 carrés qui se trouvent en haut et en bas de la figure. Comme c'est toujours le cas, certains élèves risquent de soumettre des solutions erronées. Par exemple, il est possible que quelques-uns ne fassent pas attention et considèrent chaque petite figure comme un carré. Si aucune distinction n'est faite entre les cercles et les carrés, les deux premières expressions suggérées ci-dessus sont déformées. Ainsi, $4n + 2$ devient $6n + 2$ et $(2n + 2) + 2n$ est plutôt écrite sous la forme $(2n + 2) + 4n$.

La deuxième question du post-test présente cinq solutions à un même problème (figure 40, p. 112). La grille d'analyse de Mary (1999), qui permet de caractériser la validation, nous a guidée dans le développement des différentes solutions. Ce sont plus particulièrement les différentes méthodes pouvant être utilisées par les élèves pour chaque type de preuves qui nous ont influencée.

<u>Problème 9 : La plus convaincante de toutes?</u>

Plusieurs élèves essaient de prouver si l’affirmation suivante est vraie ou fausse :
« ***La somme de trois nombres naturels consécutifs est toujours multiple de 3.*** »

Post(Ind)-9a :
Les solutions données par les élèves sont présentées ci-dessous. Classe ces solutions **de la plus convaincante à la moins convaincante**.

	1er rang : La plus convaincante	2e rang	3e rang	4e rang	5e rang : La moins convaincante
# de la solution					

Solution 1

Marie répond :
Si j’ordonne les trois nombres du plus petit au plus grand, je peux voir que :

- Le premier nombre est une unité de moins que le deuxième nombre.
- Le troisième nombre est une unité de plus que le deuxième nombre.

Si je prends l’unité de plus du 3e nombre et que je l’ajoute au 1er nombre, j’obtiens trois fois le 2e nombre. Étant donné que j’additionne le même nombre 3fois, la somme va être un multiple de 3.

Marie affirme donc que c’est vrai

Solution 2

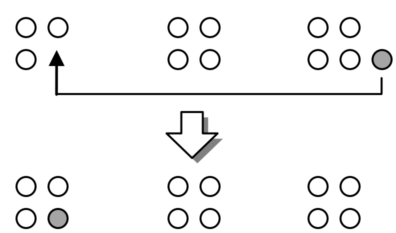
Claude répond :
1er nombre = n
2e nombre = $n + 1$
3e nombre = $(n + 1) + 1 = n + 2$

$n + (n + 1) + (n + 2)$
$= n + n + 1 + n + 2$
$= 3n + 3$
$= 3\ (n + 1)$
$3\ (n + 1)$ est un multiple de 3

Claude affirme donc que c’est vrai.

Solution 3

Cédric répond :



Cédric affirme donc que c’est vrai.

Solution 4

Julie répond :
1 + 2 + 3 = 6 (6 est un multiple de 3)
15 + 16 + 17 = 48 (48 est un multiple de 3)
29 + 30 + 31 = 90 (90 est un multiple de 3)

Julie affirme donc que c’est vrai.

Solution 5

Simon répond :
Cela semble fonctionner pour des petits nombres, mais il faut aussi vérifier pour des grands nombres.

5724 + 5725 + 5726 = 17 175
(17 175 est un multiple de 3)

Simon affirme donc que c’est vrai.

Post(Ind)-9b :
Pourquoi as-tu classé les solutions de cette façon? Pour chaque solution, explique ce qui est bon et ce qui est moins bon.

Figure 40. Post-test – Problème 9 : La plus convaincante de toutes

Les réponses finales sont les mêmes (tous les élèves confirment à juste titre la conjecture) mais les preuves présentées sont différentes et chacune d'entre elles représente un type de preuves faisant partie de la typologie de Balacheff (1988). Les élèves se retrouvent dans une phase d'action et doivent classer ces solutions de la plus convaincante à la moins convaincante et expliquer leur réponse. Étant donné qu'ils doivent évaluer la justesse et la pertinence des arguments de preuves, le savoir en jeu est protomathématique. Cet exercice nous permet d'identifier certains critères de validation permettant aux élèves de faire un classement des preuves soumises comme solutions au problème.

Toutes les solutions présentent la même réponse (la conjecture est vraie), mais les types de preuves utilisés pour expliquer cette réponse diffèrent. Comme nous l'avons dit, chaque solution peut être associée à un type de preuve faisant partie de la typologie de Balacheff (1988). La première solution (celle de Marie) est une preuve en mots et démontre un certain recul par rapport à l'action et un souci des propriétés en lien avec les nombres naturels consécutifs (par exemple, une différence de un sépare ces nombres). Ainsi, cette solution peut être associée à l'expérience mentale. La deuxième solution présentée, soit celle de Claude, est une preuve algébrique formelle associée au calcul sur les énoncés. La troisième solution (celle de Cédric) étant une preuve visuelle, elle se distingue spécialement des autres par son apparence. C'est un exemple générique, car les dessins dans cette preuve sont applicables à un nombre de cas illimités. En effet, tous les trios de nombres naturels consécutifs peuvent être représentés par le dessin réalisé par Cédric. Par conséquent, le nombre de gauche est toujours inférieur d'une unité au nombre du centre et le nombre de droite est toujours supérieur d'une unité au nombre du centre. L'unité de plus se retrouvant à la droite de l'image peut être transférée dans l'espace libre (l'unité de moins) présent dans la partie gauche de l'image. En faisant ce déplacement, on se retrouve avec un triplet formé d'un seul nombre. Ce triplet est donc automatiquement un multiple de trois. La quatrième solution proposée, soit celle de Julie, est une preuve arithmétique et repose sur le calcul de trois exemples. Conséquemment, elle est en lien avec l'empirisme naïf. Enfin, tout comme la quatrième solution, la solution de Simon (solution 5) est une preuve arithmétique. Toutefois, elle ne comporte qu'un calcul. La fonction mathématique de ce calcul se distingue de ceux présentés dans la solution 4, car il vise à compléter une preuve. Simon part de nombres jugés grands et vise à confirmer ou à infirmer l'énoncé à partir de cet exemple. Sa preuve représente une expérience cruciale. Le classement recherché, si nous

nous basons sur la typologie de preuves développée par Balacheff (1987), est présenté à la figure 41 (p. 114).

Solution de la question Post(Ind)-9a

	1er rang : La plus convaincante	2^{e} rang	3^{e} rang	4^{e} rang	5^{e} rang : La moins convaincante
# de la solution	2	1	3	5	4

Figure 41. Solution de la question Post(Ind)-9a

La preuve la plus élevée dans la hiérarchie est la démonstration mathématique développée par Claude (solution 2). Au deuxième rang se retrouve la solution 1, soit la preuve en lien avec l'expérience mentale. Ces deux preuves (solution 1 et solution 2) sont les seules preuves intellectuelles parmi celles présentées par les élèves fictifs. Les autres preuves sont des preuves empiriques. La moins convaincante de toutes, d'un point de vue mathématique, est la solution 4, où Julie ne s'appuie que sur quelques exemples pour tirer sa conclusion. Il reste à classer la solution 5 (expérience cruciale) et la solution 3 (exemple générique). Dans la solution 5, Simon propose un cas limite en supposant que si l'énoncé est aussi vrai pour ce cas, alors il le sera dans tous les cas. Étant donné que la question de la généralité est posée, cette preuve est jugée plus convaincante que la solution 4. Toutefois, l'exemple générique fourni par Cédric (solution 3) fait davantage appel à l'idée de généralisation que la solution 5. C'est pour cette raison que cette preuve se retrouve au troisième rang.

Le classement donné par les élèves risque de différer de celui proposé ci-dessus. Comme le précisent Healy et Hoyles (2000), pour les élèves, les données empiriques permettent de convaincre tandis que les mots et les images (mais pas l'algèbre) permettent d'expliquer. Si tel est le cas, les solutions 4 et 5, toutes deux basées sur des calculs concrets, risquent de se retrouver aux premier et deuxième rangs des preuves les plus convaincantes. Arsac et al. (1992) soulignent toutefois que l'effet de contrat devient très important lorsqu'une telle tâche est demandée aux élèves. En effet, « ce ne sont pas seulement leurs représentations des règles du débat et de la logique qui sont en jeu, les règles du contrat didactique interviennent aussi; ils cherchent à deviner ce que le professeur attend » (p. 136). Ainsi, dans certains cas, les élèves identifient une preuve comme étant la plus convaincante parce qu'ils ont de la difficulté à suivre le raisonnement utilisé. Les élèves qui réagissent de cette façon peuvent alors accorder un plus grand pouvoir de convaincre à la solution 2.

Le dernier problème présente un énoncé mathématique. Les élèves doivent valider ou invalider cet énoncé en présentant une preuve (figure 42, p. 115).

Problème 10 : Un nombre et son carré

Lis attentivement l'énoncé ci-dessous :

Si a est un nombre naturel impair, alors a^2 *est également un nombre impair.*

Post(Ind)-10 :
Cet énoncé est-il vrai ou faux? Justifie ta réponse.

Figure 42. Post-test – Problème 10 : Un nombre et son carré

Les élèves font appel à des savoirs mathématiques, car ils doivent avoir recours à certaines propriétés mathématiques en lien avec les nombres impairs et avec le calcul du carré d'un nombre pour valider l'énoncé mathématique. Certains élèves vont sûrement se contenter de présenter quelques cas et de conclure à partir de ces résultats. Le problème avec ce genre de solution, c'est qu'elle est seulement valide pour les cas présentés. L'énoncé présenté est plus général et vise à amener les élèves à prendre en considération ce caractère de généralité, entre autres en s'appuyant sur des propriétés mathématiques lors du développement de leur preuve[70]. Plusieurs solutions sont acceptées. Par exemple, la solution présentée à la figure 43 (p. 116) est une des solutions valides à ce problème.

[70] En lien avec la règle des propriétés mathématiques.

Première solution suggérée au problème 10 : Un nombre et son carré

Tout nombre pair peut être représenté par $2a$
Tout nombre impair peut être représenté par $2a + 1$

Ce nombre au carré = $(2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1$

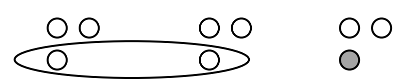
$4a^2$ peut aussi être écrit $2n$ (où $n = 2a^2$). $4a^2$ est donc un nombre pair.
$4a$ peut aussi être écrit $2m$ (où $m = 2a$). $4a$ est un nombre pair.
Étant donné qu'on additionne 1 à deux nombres pairs, on obtient un nombre impair.

Si a est un nombre naturel impair, a^2 est également un nombre impair.

Figure 43. Première solution suggérée à la question Post(Ind)-10

D'autres élèves peuvent choisir de présenter leur solution sous la forme d'un dessin (figure 44, p. 116). Vu que tout nombre impair peut être écrit sous la forme $2x + 1$, tout nombre impair est représenté par une ou plusieurs paires de points et un point supplémentaire. Quand une telle figure est répétée un nombre impair de fois, si les points supplémentaires sont regroupés en paquets de deux, il reste toujours un point, ce qui veut dire que la solution est toujours impaire.

Deuxième solution suggérée au problème 10 : Un nombre et son carré



Étant donné qu'on obtient un nombre pair de « paquets de deux points » et qu'il y a toujours un point seul, on peut conclure que si a est un nombre naturel impair, a^2 est également un nombre impair.

Figure 44. Deuxième solution suggérée à la question Post(Ind)-10

Les analyses présentées au chapitre 4 porteront principalement sur les situations de validation. Toutefois, il importe de noter que pour être en mesure de se retrouver dans une situation de validation, les élèves doivent parfois passer par les situations d'action et de formulation (par exemple, dans les problèmes qui touchent la recherche de régularités, alors qu'ils doivent d'abord trouver une façon pour trouver un certain nombre d'objets peu importe le numéro de la figure et ensuite (in)valider certaines solutions soumises par leurs collègues). Dans d'autres cas, notamment lorsque des énoncés mathématiques sont fournis aux élèves et qu'ils ne doivent que poser un jugement sur ces énoncés, ils se retrouvent en situation de validation. Nous travaillons donc avec une variété de situations de validation.

3.1.2 Rôle de l'enseignant

Lors de l'expérimentation, le rôle de l'enseignant est crucial, car il sert de tremplin aux activités mathématiques proposées. Entre autres, il est primordial que l'enseignant relance sans cesse les élèves en les encourageant à aller plus loin dans leur réflexion. Si les élèves ne remettent pas en question le travail de leurs pairs, c'est à l'enseignant de solliciter ce travail et de les guider dans leur questionnement. Dès que l'activité est en branle et que les élèves savent ce qu'ils ont à faire, l'enseignant devient, en quelque sorte, un acteur périphérique dont la tâche principale consiste à s'assurer que l'activité se déroule bien. Il revient également à l'enseignant de maintenir des conditions qui permettent aux élèves de demeurer en activité (par exemple, questionner les élèves afin de les amener à approfondir leurs réflexions). Par surcroît, l'enseignant du groupe expérimental est responsable d'expliquer le fonctionnement du forum électronique à ses élèves. Il peut prendre part aux échanges en ligne, mais tout comme les élèves, il doit utiliser un pseudonyme afin de conserver son anonymat.

Les décisions prises par les enseignants peuvent avoir une influence sur le déroulement des activités et par le fait même sur les résultats. Dans le but de minimiser cette influence, différents documents leur sont remis afin de leur présenter les conditions de réalisation de l'expérimentation. Dans un premier temps, les enseignants du groupe contrôle et les enseignants du groupe expérimental reçoivent une vue d'ensemble du dispositif expérimental (annexe 8, p. 333 et annexe 9, p. 338). Ce document contient, en premier lieu, des précisions concernant chaque activité (prétest, activité 1, etc.) et chaque problème : tâche à accomplir, lieu de l'activité (par exemple, en salle de classe), type de travail (individuel ou en équipe) ainsi que le temps réservé à l'activité. Le rôle de l'enseignant pendant l'expérimentation est également défini. Enfin, le document réservé au groupe expérimental présente des suggestions sur l'utilisation du forum électronique. Un deuxième document, présentant la marche à suivre pour l'ensemble de l'expérimentation, est remis aux enseignants du groupe contrôle et aux enseignants du groupe expérimental (annexe 10, p. 345 et annexe 11, p. 349). Ce document présente ce que les enseignants doivent faire lors de chaque activité. De plus, de manière à s'assurer que chaque activité soit réalisée à peu près au même moment dans chacune des classes, un calendrier est remis aux enseignants des groupes contrôle et expérimental (annexe 12, p. 355 et annexe 13, p. 360). Ce calendrier spécifie le nombre de jours et la semaine réservés à chaque activité. Finalement, afin d'uniformiser au maximum l'institutionnalisation qui se fait avec les élèves des deux groupes, les enseignants reçoivent un document contenant les solutions à chacun des problèmes (annexe 6, p. 316).

Nous reconnaissons donc la variable que représentent les enseignants dans le cadre de notre expérimentation et l'influence qu'ils peuvent avoir sur les résultats obtenus. Nous avons pris des mesures de précautions afin de tenter de contrôler le plus possible cette influence en leur précisant les conditions de réalisation de l'expérimentation. De plus, il y a eu une communication continue (en personne et par courrier électronique) entre la chercheuse et les enseignants tout au long de l'expérimentation, plus précisément entre chaque activité. Nous avons également tenté de mieux comprendre le fonctionnement des enseignants lors des différentes activités à travers des entretiens semi-directifs[71].

3.1.3 Rôle de la chercheuse

Pendant l'expérimentation, nous ne participons pas aux séances de classe du groupe contrôle et du groupe expérimental (travail sur papier), ni aux échanges en ligne avec les élèves et les enseignants du groupe expérimental[72]. Nous avons toutefois accès à l'ensemble du travail réalisé par les élèves au fur et à mesure qu'il est complété, car les documents papier nous sont remis après chaque activité et l'information écrite dans le forum électronique est toujours accessible en ligne.

3.2 Population

Comme nous l'avons évoqué auparavant, des enseignants et des élèves francophones du Nouveau-Brunswick et du Québec participent à notre projet de recherche. Plus précisément, nous travaillons avec quatre classes, soit deux classes situées au Nouveau-Brunswick et deux classes situées au Québec. Une classe du Nouveau-Brunswick

---

[71] Voir la section *3.3.4 Entretiens semi-directifs* (p. 126) pour plus de détails.

[72] Voir la section *3.3.5 Biais méthodologiques* (p. 129) pour plus d'information concernant le biais associé à notre participation aux échanges en ligne.

et une classe du Québec constituent le groupe expérimental et les deux autres classes forment le groupe contrôle. Les échanges du groupe contrôle ont strictement lieu en salle de classe alors qu'une partie des échanges du groupe expérimental a lieu en salle de classe tandis que l'autre partie se fait dans l'outil de communication en ligne[73]. Lors des échanges en ligne, les élèves peuvent commenter ou questionner les messages des collègues de leur classe ou ceux des élèves de l'autre province. De tels échanges entre des élèves de deux provinces permettent le dépassement des barrières physiques de la salle de classe. La présence des deux groupes, soit le groupe contrôle et le groupe expérimental, nous permet de comparer les productions des élèves et d'observer l'influence que peut avoir le forum électronique sur le travail qu'ils réalisent.

Le choix de faire participer des classes provenant de deux provinces s'explique surtout par le souci d'obtenir une diversité d'idées lors de la réalisation des activités mathématiques. Premièrement, bien que des liens puissent être faits entre les trois compétences disciplinaires de mathématiques du programme de formation de l'école québécoise (enseignement secondaire, premier cycle) et les orientations générales des programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick, il demeure que ces programmes d'études sont distincts et que les élèves risquent d'en retirer des expériences différentes. De plus, les ressources auxquelles les élèves ont accès ne sont pas nécessairement les mêmes, car chaque province utilise des manuels scolaires qui lui sont propres. Enfin, la réalité vécue par les élèves du Québec et du Nouveau-Brunswick n'est pas la même, si ce n'est qu'en raison de leur situation géographique[74].

D'autres éléments, qui touchent davantage la facilité d'établir des contacts avec les gens et la faisabilité de l'expérimentation, influencent également le choix de s'arrêter à ces deux provinces. Dans un premier temps, la chercheuse a fait ses études de premier cycle et de deuxième cycle au Nouveau-Brunswick et elle a enseigné la mathématique au niveau secondaire dans une école publique de cette province. De plus, ses études de troisième

[73] Les élèves de l'une des classes du groupe expérimental se déplacent au laboratoire informatique pour les échanges en ligne. Notons que les élèves de cette classe sont habitués de se déplacer au laboratoire pour travailler à l'ordinateur, car l'enseignant s'y rend avec ses élèves au moins une période par cycle de neuf jours. Lors de la plupart de ces périodes, les élèves font des exercices sur Netmaths (http://www.netmaths.net/). Les élèves qui font partie de l'autre classe du groupe expérimental ont accès à des tablettes PC. Ils échangent donc dans l'outil de communication en ligne en salle de classe.

[74] Bien entendu, des gens soutiendront que les élèves qui vivent dans des régions différentes d'une même province vivent également des expériences qui leur sont particulières. Nous sommes d'accord avec cet argument. Toutefois, à notre avis, la combinaison du plus grand nombre possible d'éléments (programmes d'études uniques à chaque province, manuels scolaires différents, etc.) favorise davantage l'émergence d'idées dissemblables.

cycle ont été faites au Québec. Ainsi, la communication avec les différents partis risque de se faire plus facilement, étant donné que certains contacts sont déjà amorcés dans chacune de ces provinces. La proximité des deux provinces au lieu d'étude de la chercheuse influence aussi ce choix, car certains déplacements sont nécessaires lors de l'expérimentation.

3.2.1 Niveaux scolaires visés

Le développement d'habiletés en lien avec l'utilisation des raisonnements inductif et argumentatif fait son apparition vers la fin du primaire au Nouveau-Brunswick et au début du secondaire au Québec. La preuve est officiellement introduite dans les programmes d'études en 9e année au Nouveau-Brunswick et au deuxième cycle du secondaire au Québec. Enfin, la démonstration n'est exploitée qu'à la fin du secondaire dans les deux systèmes scolaires.

Dans le cadre de ce projet de recherche, la participation d'élèves de 12 à 14 ans, soit d'élèves de la 7e et de la 8e année dans le système scolaire néo-brunswickois et d'élèves du premier cycle du secondaire dans le système scolaire québécois, est visée. Or, étant donné que nous nous intéressons au développement et à l'évaluation de preuves, comment expliquer le fait que les élèves de 12 à 14 ans soient ciblés plutôt que les élèves de 15 ans, cet âge correspondant davantage au moment où la preuve semble être introduite dans le curriculum? Premièrement, il est vrai que les programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick et du Québec introduisent formellement la preuve vers la neuvième année de scolarité des élèves. Avant ce moment, aucune référence au terme « preuve » ne peut être observée. Toutefois, un regard plus approfondi sur ces programmes d'études nous permet de reconnaître que plusieurs éléments qui entrent en jeu dans la conception de preuves font leur entrée dans le curriculum bien plus tôt. Dans le programme de formation de l'école québécoise au premier cycle du secondaire, il est précisé que « l'élève évolue entre différents types de raisonnements, notamment l'analogie, l'induction et la déduction, en mobilisant les raisonnements particuliers à chaque champ mathématique » (Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2005, p. 243). De plus, dès le premier cycle du secondaire, on encourage le débat dans les cours de mathématiques (Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, 2005). Dans les programmes d'études de mathématiques de 7e année et de 8e année du système scolaire néo-brunswickois, la description du rôle de l'élève tourne autour de sa responsabilisation et de son implication intellectuelle dans le processus d'apprentissage. Cette implication intellectuelle est définie par différents comportements pouvant être observés chez l'élève, entre autres par l'émission de conjectures et par l'exploration d'exemples et de contre-exemples. Il est également précisé que l'élève doit essayer :

> « de se convaincre lui-même et de convaincre les autres de la validité de certaines représentations, conjectures, solutions ou réponses, conviction qu'il veut fondée sur des arguments mathématiques et une réflexion sur son travail et celui des autres, sans attendre une approbation venue « d'en haut », une conviction appuyée sur la seule confiance en la compétence de l'enseignant promu juge suprême » (Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick, 2000c; d, p. 41).

La tranche d'âge visée correspond donc au moment où l'importance de la construction d'argumentations pertinentes et valides pour soutenir certaines hypothèses élaborées par les élèves fait son apparition. Enfin, comme le précise Van Dormolen (1977), l'atteinte d'un niveau supérieur de pensée nécessite de l'entraînement. Par conséquent, nous désirons travailler auprès des élèves dès leurs premiers contacts avec les éléments entrant en jeu dans la conception de preuves.

3.2.2 Recrutement des participants

Le choix des élèves qui participent au projet de recherche passe par le recrutement des enseignants. La participation de ces derniers se fait sur une base volontaire. Afin de recruter les enseignants, un message est envoyé dans dix-sept écoles de la région de Québec et de la région de Montréal (annexe 14, p. 365). Ce même message est publié sur la page d'accueil du site Internet[75] dans lequel se trouve le forum électronique utilisé dans le cadre de cette recherche. Ce message est également envoyé par courrier électronique à tous les enseignants inscrits à la communauté en ligne de ce site ainsi qu'à quelques agents pédagogiques de la région de Montréal. Le responsable du site Internet, professeur à l'Université de Moncton (Nouveau-Brunswick), reçoit aussi ce message afin de le faire suivre aux enseignants de certaines écoles du Nouveau-Brunswick. Si les enseignants qui connaissent déjà le site sont principalement ciblés, c'est que l'appropriation d'un nouvel

---

[75] Ce site Internet est présenté plus en détail à la prochaine section *3.3.3.1 Communauté d'apprentissages scientifiques et mathématiques interactifs (CASMI)* (p. 125).

outil technologique demande un certain temps. Il est donc avantageux d'utiliser un outil de communication qui existe déjà et auquel est associée une communauté. Parmi l'ensemble des enseignants qui nous font part de leur intérêt à participer à la recherche, quatre sont choisis. Ce choix est basé sur des critères nous permettant de cibler les classes les plus comparables possible : niveau scolaire, milieu socio-économique, nombres d'élèves dans la classe, nombre d'années d'expérience avec le site Internet, etc.

3.3 Cueillette des données

Différents outils servent à recueillir des données sur les preuves développées par les élèves et sur le discours adopté pour valider ou invalider des preuves. Premièrement, c'est grâce aux données recueillies dans un prétest, dans différentes activités et dans un post-test (format papier) que nous sommes en mesure d'avoir un portrait du travail réalisé par les élèves des deux groupes pendant l'expérimentation. Les traces conservées dans le forum électronique nous permettent de suivre le travail du groupe expérimental tout au long de la réalisation des activités mathématiques. Enfin, ce sont les données recueillies à travers des entretiens semi-directifs réalisés avec tous les enseignants ainsi qu'avec quelques élèves qui nous aident à mieux comprendre le déroulement des activités mathématiques dans le forum électronique et en salle de classe.

3.3.1 Documents : prétest, activités et post-test

Que ce soit lors de la complétion du prétest et du post-test ou lors de la réalisation des quatre activités, les élèves doivent toujours laisser des traces de leur travail sur papier. Ainsi, le prétest et le post-test se font entièrement sur papier. L'objectif de ces deux tests est de nous permettre d'avoir un aperçu des connaissances avant et après l'expérimentation. La comparaison des résultats de ces deux tests nous permettra de voir s'il y a des changements pour chacun des groupes au niveau du développement d'habiletés de validation algébrique ainsi qu'au niveau du développement d'habiletés en lien avec l'évaluation de preuves en algèbre. En comparant ces changements d'un groupe à l'autre, nous pouvons observer certaines tendances[76] en lien avec l'influence que peut avoir l'utilisation d'un forum électronique sur le développement de telles habiletés lorsque les élèves se retrouvent en situation de validation individuelle et en équipe dans un contexte mathématique algébrique.

[76] Le petit nombre de groupes faisant partie de notre expérimentation nous incite à parler de tendances et non de conclusions pouvant être généralisées à une population plus étendue.

3.3.2 Travail individuel et travail d'équipe

Pour chaque activité, sauf le prétest et le post-test qui sont complétés de façon individuelle, les élèves travaillent d'abord individuellement, puis ils se regroupent en équipe composée de deux à quatre personnes afin de discuter de leurs réponses[77]. Dans le cadre de chacune des activités, deux documents sont donc remis aux élèves, soit un pour chaque type de travail à compléter.

Le travail individuel appelle les élèves à se familiariser avec le problème qui leur est proposé avant d'avoir à en discuter avec les membres de leur équipe. Ce choix d'amener les élèves à travailler en équipe, à la suite du travail d'individuel, est basé sur plusieurs facteurs. Premièrement, dans le cadre de leurs travaux sur le raisonnement déductif au collège[78], Arsac et al. (1992) notent les effets positifs de la coopération[79] dans la résolution d'un problème. Ils remarquent, entre autres, que le travail coopératif pousse les élèves à expliciter et à argumenter leurs choix. Le travail coopératif apparaît donc intéressant dans le cadre de la mise sur pied de situations de validation. La coopération favorise également la dialectique de la formulation, car le travail de groupe encourage les échanges et les formulations entre les élèves. « Ces formulations sont fondamentales, car le passage par l'expression, par le langage, permettrait même à ce qui est découvert par chacun dans le travail de groupe d'être ensuite utilisé individuellement dans un autre contexte » (Arsac et al., 1992, p. 178). Cependant, comme nous l'avons déjà dit, le simple fait d'asseoir des élèves à une même table ne garantit aucunement qu'ils collaborent ou même qu'ils échangent, car la situation dans laquelle les élèves se retrouvent ne détermine pas leurs actions. C'est pourquoi la situation d'apprentissage coopératif doit être structurée et gérée par l'enseignant pour être réellement profitable aux élèves (Johnson et Johnson, 1988).

---

[77] Le choix d'amener les élèves à travailler d'abord individuellement pour ensuite leur permettre d'échanger en équipe s'appuie sur différents éléments. Premièrement, cela leur donne la chance de se familiariser avec le problème avant d'avoir à en discuter. Par la suite, le fait de travailler en équipe et d'échanger permet aux élèves de voir les problèmes d'un point de vue différent du leur. Enfin, si chaque élève du groupe expérimental soumet une solution dans le forum électronique, la quantité d'information à analyser par les autres élèves risque de devenir trop lourde (plus d'une cinquantaine de solutions soumises pour chaque problème). Le travail d'équipe permet donc de répondre à cette contrainte liée à l'utilisation du forum électronique.

[78] Les travaux d'Arsac *et al*. (1992) ont été effectués en France. Le terme collège réfère ici à des élèves de 11 et 12 ans.

[79] Les auteurs définissent la coopération comme une « interaction sans conflit » (Arsac *et al.*, 1992, p. 178).

3.3.3 Outil de communication en ligne : forum électronique

Plusieurs outils de communication en ligne possédant différentes caractéristiques et pouvant servir de milieu pour les échanges des élèves du groupe expérimental sont disponibles. Néanmoins, l'outil sélectionné doit répondre aux besoins de cette recherche. Ces besoins se résument en trois points : la possibilité d'échanger de façon asynchrone, la présence de traces et l'existence d'une communauté en ligne.

Premièrement, l'outil utilisé doit permettre la communication asynchrone. Bien que certains avantages soient associés aux échanges synchrones chez les élèves, un outil de communication asynchrone semble davantage répondre à nos besoins. En effet, le développement de preuves étant reconnu comme une construction cognitive, il requiert un certain temps (Balacheff, 1987). Or, les conditions actuelles des systèmes scolaires québécois et néo-brunswickois permettent peu ce temps de réflexion nécessaire chez les élèves. L'exploitation d'un outil de communication asynchrone présente alors deux avantages : elle permet aux élèves de réfléchir avant d'exprimer leurs idées ouvertement et elle leur permet de poursuivre une discussion, peu importe le moment de la journée ou l'endroit où ils se trouvent (en soirée à la maison, pendant la pause à l'école, etc.). En second lieu, l'outil doit conserver les traces des messages. Étant donné que nous nous intéressons aux différents types de preuves développées par les élèves et aux règles du débat mathématique utilisées lors du développement ou de l'évaluation de ces preuves, nous devons être en mesure de conserver des traces des messages qui seront échangés. Il est donc essentiel que l'outil de communication sélectionné permette cette sauvegarde des données. De plus, le fait de publier des messages dans un outil qui conserve les traces amène les élèves à fournir un plus grand effort dans leur travail (Baughman, 1997). Enfin, l'outil doit être associé à une communauté d'apprenants. L'appropriation d'un nouvel outil technologique demande un certain temps. Il est donc avantageux pour nous d'utiliser un outil de communication qui existe déjà et auquel est associée une communauté apprenante.

À la lumière de ce qui précède, trois outils de communication parmi ceux présentés à la section *1.7.2 Outils de communication en ligne* (p. 39) semblent répondre à nos besoins : le forum électronique, le blogue et le wiki. Ces trois outils permettent des échanges asynchrones et la totalité des messages qui y paraissent est sauvegardée en mémoire et peut être analysée. Toutefois, le blogue et le wiki sont peu connus dans le monde de l'éducation et peu d'enseignants les intègrent à leur curriculum (Richardson, 2004). La situation est différente en ce qui a trait au forum électronique. De plus en plus de forums sont intégrés à des sites Web éducatifs[80] et sont utilisés à la fois par des enseignants et par des élèves. C'est donc sur cet outil de communication en ligne que notre choix s'arrête.

3.3.3.1 Communauté d'apprentissages scientifiques et mathématiques interactifs (CASMI)

Dans le cadre de notre recherche, le forum électronique a deux fonctions : une fonction expérimentale, car c'est le milieu informatique dans lequel les élèves du groupe expérimental échangent et une fonction de cueillette des données, car il a la propriété de sauvegarder les traces des messages qui y sont publiés. Les messages sont donc non seulement conservés pour les élèves afin de leur permettre de poursuivre la discussion en temps différé, mais également pour nous, à des fins d'analyse. Plusieurs forums électroniques permettant les échanges entre les apprenants sont disponibles en ligne. Notre choix s'arrête sur le forum électronique du CASMI (Communauté d'apprentissages scientifiques et mathématiques interactifs). Ce site Internet, initialement appelé CAMI (Chantier d'apprentissages mathématiques interactifs), est le fruit d'une étroite collaboration entre l'Université de Moncton et le district scolaire I (Nouveau-Brunswick). Il a été créé dans le but d'aider les élèves des écoles primaires et secondaires à améliorer leurs habiletés de communication et de raisonnement mathématiques (Freiman et Lirette-Pitre, 2008; LeBlanc et Freiman, sous presse; Vézina et Langlais, 2002) en plus de viser le développement d'une attitude positive relativement à la résolution de problèmes en mathématiques (LeBlanc et Freiman, sous presse). Étant donné que les visées du projet CASMI correspondent aux visions des programmes d'études de mathématiques du Nouveau-Brunswick et du Québec (résolution de problèmes et intégration des TIC) et qu'une communauté apprenante y est déjà développée, il semble que l'outil de communication en ligne présent dans le CASMI réponde aux besoins de l'étude.

Dans le but d'améliorer la qualité de cette ressource en ligne, certaines modifications furent amenées au CAMI en 2006. C'est ainsi que celui-ci devint CASMI et

---

[80] Voici quelques exemples : CASMI (http://www.umoncton.ca/casmi), Maths-Forum (http://www.maths-forum.com/), Forum Espace Math (http://www.espacemath.com/forum/) Forum mathématique (http://www.maths-forum.com/), M@th en Ligne (http://www.forum.math.ulg.ac.be/), MathemaTeX (http://www.mathematex.net/phB2/index.php).

vit s'ajouter à sa liste d'outils disponibles, entre autres, trois forums de discussion : Lectures, Mathématiques et Sciences. Grâce à ces forums, les membres de la communauté[81] peuvent poser des questions, répondre à celles posées par les autres membres ou encore réagir à certains commentaires. Dans le cadre de notre projet de recherche, un forum électronique exclusivement réservé à la réalisation des activités mathématiques en lien avec notre expérimentation a été créé. Un menu a été ajouté à ce forum afin que les élèves soient en mesure d'insérer des symboles mathématiques dans leurs messages. Ainsi, ils peuvent utiliser le langage de la familiarité ou le langage formel lorsqu'ils publient en ligne. Les élèves peuvent également joindre une image numérisée à leur message, même s'il demeure que cette façon de faire est plus ou moins conviviale. Cela représente une limite dans le sens où les élèves ne peuvent pas présenter aussi facilement que sur papier certains types de preuves (limite). Or, cela peut possiblement devenir un moteur pour amener les élèves à passer à un autre type de preuves.

Un nom d'utilisateur et un mot de passe sont nécessaires à toute personne désirant utiliser le site Internet. De plus, les échanges qui ont lieu dans ce nouveau forum électronique sont limités aux participants de la recherche, car l'accès au forum nécessite un mot de passe supplémentaire. Seuls les élèves et les enseignants participant à la recherche, la chercheuse ainsi que l'administrateur du site Internet ont accès aux traces de ces échanges. Bien qu'à chaque activité, un certain laps de temps est réservé pour les échanges en ligne, les élèves et les enseignants ont accès au forum électronique à l'extérieur des heures de classe.

3.3.4 Entretiens semi-directifs

La chercheuse n'assiste pas aux séances de classe dans lesquelles ont lieu les différentes activités et tous les détails en lien avec la réalisation de ces activités ne transparaissent pas dans les traces sur papier ou dans les traces du forum électronique. C'est pourquoi, dans le but de mieux comprendre comment les activités ont été vécues en salle de classe, à l'extérieur de la salle de classe et dans le forum électronique, des échanges sont réalisés avec des enseignants et des élèves. Ces échanges servent de mécanisme de triangulation pour assurer la validité des données recueillies et se font sous forme d'entretiens semi-directifs enregistrés (Miles et Huberman, 2003). Ainsi, les entretiens

---

[81] Actuellement, près de 3000 enseignants et 26 000 élèves sont inscrits à la communauté en ligne du CAMI. Ces membres proviennent principalement du Nouveau-Brunswick et du Québec.

représentent davantage un moyen pour consolider les résultats que des données à analyser comme telles. Ils sont composés de questions générales sur la notion de preuve et l'intégration des TIC en mathématiques et de questions plus précises sur la réalisation des activités en salle de classe ou dans le forum électronique.

Notre rôle lors des entretiens avec les enseignants et les élèves s'avère être un rôle de membre actif (Adler et Adler, 1987). En effet, à cette étape, nous nous acquittons du rôle de guide lors de la discussion en dirigeant les échanges afin de cerner les informations pertinentes qui nous permettent de comprendre comment les activités se sont vécues en salle de classe et à l'extérieur de la salle de classe et les raisons pour lesquelles les apprenants ont ou non développé des habiletés de validation algébrique et des habiletés en lien avec l'évaluation de preuves en algèbre.

Il importe de noter que les entrevues ont eu lieu après l'expérimentation, mais avant l'analyse des résultats. Cela peut être expliqué par le fait que l'expérimentation a pris fin au début du mois de juin. Par conséquent, il ne restait que deux ou trois semaines à l'année scolaire. Si les entrevues n'avaient pas lieu dans ce laps de temps, il aurait fallu attendre à l'année scolaire suivante. Ainsi, pour que les élèves et les enseignants soient en mesure de se rappeler les activités, il semblait pertinent de réaliser les entretiens rapidement. Des entretiens réalisés plus tard auraient possiblement permis de préciser certaines questions, mais les réponses obtenues n'auraient pas nécessairement été meilleures à cause de l'effet de mémoire.

3.3.4.1 Entretiens semi-directifs avec les enseignants

Outre les élèves qui réalisent les activités d'apprentissage, les enseignants ont également beaucoup d'informations à offrir. En effet, ce sont eux qui sont sur place lorsque les élèves sont à la tâche. Ils ont donc accès à certaines informations qui ne sont pas nécessairement accessibles sur papier ou dans le forum électronique. Ainsi, il semble pertinent d'échanger avec les praticiens en ce qui a trait à la façon dont ils vivent les activités d'apprentissage. De cette façon, nous pouvons mieux comprendre la façon dont ils gèrent les activités, et ce, autant en salle de classe que dans le forum électronique. En effet, les interventions des enseignants en salle de classe peuvent grandement influencer le type de preuves développées par les élèves ou encore leur façon d'évaluer les preuves. L'expérimentation de Healy et Hoyles (2000), par exemple, fait ressortir l'importance que les élèves accordent à l'opinion de leur enseignant. Effectivement, les auteures remarquent que les élèves tendent à séparer les preuves en deux catégories : celles préférées par les enseignants et celles que les élèves préfèrent personnellement. Il est donc important de comprendre la façon dont les enseignants agissent en salle de classe afin de mieux comprendre la façon dont les élèves réagissent pendant les activités mathématiques.

L'objectivation de leur pratique par les deux enseignants membres du groupe expérimental facilite la contextualisation des échanges vécus par les apprenants dans l'outil de communication en ligne. En effet, ces enseignants peuvent nous aider à expliciter le sens des messages retrouvés dans le forum électronique. Les entretiens semi-directifs effectués avec les deux enseignants du groupe contrôle nous permettent également de mieux comprendre comment se déroulent les activités mathématiques, même si celles-ci n'ont pas lieu dans le forum électronique. Enfin, c'est à travers la comparaison des pratiques des enseignants des deux groupes que nous serons possiblement en mesure d'associer des comportements d'élèves à l'utilisation d'un outil de communication en ligne ou d'expliquer par les pratiques de classe certaines différences observées dans les deux groupes. Les guides d'entretien utilisés pour les entrevues avec les enseignants du groupe contrôle et du groupe expérimental sont présentés respectivement à l'annexe 15 (p. 366) et à l'annexe 16 (p. 368).

3.3.4.2 Entretiens semi-directifs avec les élèves

Des entretiens semi-directifs enregistrés sont également réalisés avec une dizaine d'élèves, soit de deux à quatre élèves par classe[82]. Tout comme les entretiens effectués avec les enseignants, les entretiens semi-directifs effectués auprès des élèves sont composés de questions générales sur l'intégration des TIC en mathématiques, de questions plus précises concernant la notion de preuve et de questions touchant la réalisation des activités (en salle de classe ou dans le forum électronique). Dans le but de mesurer l'apport de l'outil de communication en ligne au développement d'habiletés de validation algébrique et d'évaluation de preuves en algèbre (attribution causale), quelques questions touchant l'utilisation du forum électronique sont ajoutées au protocole d'entrevue des élèves faisant

[82] Les entrevues avec les élèves peuvent avoir lieu avant les heures de classe (pour ceux qui arrivent à l'école tôt), pendant l'heure du dîner ou après les heures de classe. Les élèves peuvent choisir le jour de la semaine (lundi au vendredi) ainsi que le moment de la journée (parmi les trois choix) qui leur conviennent. De cette façon, les activités normales des élèves (activités pédagogiques, retour à la maison, etc.) ne sont pas perturbées.

partie du groupe expérimental. Ces échanges avec les élèves du groupe expérimental peuvent, entre autres, nous aider à saisir le sens de certaines informations retrouvées dans le forum électronique (par exemple, si certains messages écrits en ligne sont influencés par des interventions de l'enseignant, par des échanges ayant lieu en salle de classe ou encore par les commentaires d'un parent, etc.). Les entrevues avec les élèves du groupe contrôle sont réalisées selon le guide d'entretien présenté à l'annexe 17 (p. 371). Celles avec les élèves du groupe expérimental sont réalisées selon le guide d'entretien présenté à l'annexe 18 (p. 373).

3.3.5 Biais méthodologiques

Des sources potentielles de biais méthodologique, en lien avec notre projet de recherche, peuvent être déterminées. L'une des principales, qui semble particulièrement importante, est l'effet de la chercheuse sur les échanges dans le forum électronique. Nous croyons qu'il est préférable d'adopter un rôle de membre en retrait (Adler et Adler, 1987) lors de l'expérimentation, car notre implication dans les échanges qui ont lieu dans le forum électronique peut avoir une influence non pas sur les élèves, mais bien sur les enseignants. Les élèves ne nous voient qu'à la fin de l'expérimentation, soit lors des entretiens semi-directifs. Ils n'ont donc aucun moyen de nous identifier si nous publions des messages en ligne. Nos commentaires et nos questions étant perçus au même niveau que ceux provenant d'un membre de la communauté, ils n'ont donc pas nécessairement plus d'influence que les messages provenant d'autres participants. Notre crainte réside plutôt au niveau des enseignants. En effet, étant donné que nous les rencontrons avant le début de l'expérimentation afin de discuter avec eux et de leur expliquer le projet de recherche, ils pourraient reconnaître nos interventions. Par conséquent, nous nous méfions de l'influence que peut avoir la lecture de certains de nos commentaires sur leurs interventions en salle de classe ou dans le forum électronique. Ils risquent de guider les élèves vers une direction plutôt qu'une autre si nous émettons un commentaire dans un certain sens. Ils peuvent ainsi tenter de répondre à nos attentes (ou du moins à celles perçues dans nos messages). Nous préférons donc laisser libre cours aux discussions dans l'outil de communication[83]. Bref,

[83] Il est possible pour nous de placer des commentaires en ligne en utilisant un pseudonyme. De cette façon, les enseignants ne savent pas qui nous sommes. Toutefois, cette façon de faire n'est pas souhaitable, car à la source, nous sommes biaisée. En effet, nous savons ce que nous voulons mesurer et il y a de fortes chances que malgré nous, nous tentions de « forcer » les élèves dans une direction plutôt qu'une autre. En faisant cela, nous encourageons l'entretien artificiel des discussions qui ont lieu dans le forum électronique. Il est

lors de la réalisation des activités mathématiques, notre présence est symbolique. Les enseignants savent que nous avons accès à l'information écrite dans le forum électronique même si nous ne sommes pas physiquement sur place pour prendre des notes et même si nous ne participons pas aux échanges en ligne.

La participation des enseignants du groupe expérimental aux échanges dans le forum électronique représente également une source potentielle de biais méthodologique. Lors de la réalisation des activités en salle de classe, les enseignants accompagnent les élèves dans leur démarche d'apprentissage en participant, au besoin, au contenu élaboré dans l'outil de communication en ligne. Il est toutefois préférable pour les enseignants d'utiliser un pseudonyme afin de conserver leur anonymat et d'éviter que leurs relances ne créent une certaine forme de dépendance chez les élèves. Si les enseignants participent régulièrement aux échanges en ligne, il est possible que les élèves prennent l'habitude de lire les commentaires d'un enseignant avant de prendre position ou de suggérer une réponse. De plus, nous voulons éviter que les enseignants valident ou invalident les propos des élèves pendant les activités en ligne[84]. Dans un tel cas, les élèves risquent de se retrouver dans une situation de validation par une figure d'autorité, ce qui est à éviter. Ainsi, il est souhaitable que la validation et l'invalidation du travail des élèves se fassent principalement entre eux. L'apport des enseignants peut toutefois être nécessaire, entre autres, pour réorienter la discussion. Ainsi, l'identification de balises claires permettant de guider les interventions des enseignants devient très importante. Ces balises sont présentées à l'annexe 19 (p. 375).

3.4 Précisions sur l'analyse des données

Notre analyse portera, entre autres, sur la comparaison des résultats obtenus à chaque étape de l'expérimentation. Dans un premier temps, la comparaison des résultats du groupe contrôle et du groupe expérimental au prétest nous permettra de voir jusqu'à quel point les groupes sont comparables ou non. L'analyse du prétest, des différentes activités ainsi que du post-test nous permettra ensuite de faire état d'un mouvement chez un groupe (si mouvement il y a) entre le début et la fin de l'expérimentation.

---

primordial pour nous que les résultats obtenus ne soient pas attribuables à notre participation aux discussions dans le forum électronique, mais plutôt à la participation des élèves et des enseignants.

[84] Les enseignants ont toutefois à valider ou à invalider le travail des élèves lors des situations d'institutionnalisation.

Le travail accompli sur papier par chacun des deux groupes sera mis en parallèle, car si le forum électronique a un effet sur le travail des élèves, ce sont notamment les productions sur papier qui pourront en témoigner. Cette analyse nous permet donc de comparer un type de travail similaire (travail sur papier chez les deux groupes). Le travail réalisé sur papier par les élèves de chacun des groupes sera également comparé au travail réalisé dans le forum électronique par les élèves du groupe expérimental. Une telle comparaison permettra de voir si le travail dans l'un ou l'autre des environnements témoigne de quelque chose de différent.

3.4.1 Mesures de confidentialité

Un code est attribué à chaque participant de la recherche et seule la chercheuse a la liste des participants et des codes qui leur sont attribués. Les renseignements sont conservés dans un classeur sous clé situé dans un bureau fermé et aucune information permettant d'identifier les enseignants et les élèves n'est publiée.

3.4.2 Analyse des informations recueillies dans le forum électronique

Les phénomènes observés en ligne (productions d'élèves et commentaires) sont analysés en partie pendant la collecte de données, soit au fur et à mesure que les activités sont réalisées dans le forum électronique. Cela nous permet de corriger des problèmes techniques en lien avec l'utilisation du forum électronique (ex. : difficulté à placer des messages en ligne).

3.4.2.1 Avertissements en lien avec l'expérimentation

Comme dans toute expérimentation, certains événements ont eu lieu et ont fait que les choses ne se sont pas passées exactement comme prévu. Nous en faisons ici la liste, pour y revenir en temps et lieux lors des analyses afin que le lecteur soit situé. Premièrement, dans le prétest, l'une des solutions[85] (solution 4 associée à l'empirisme naïf) est mal disposée, ce qui peut conduire certains élèves à considérer cette preuve comme erronée, alors qu'elle représente une preuve empirique correcte[86]. C'est pour cette raison

---

[85] Dans le cadre de ce projet de recherche, le terme « réponse » est utilisé pour désigner le choix d'un élève à une question fermée (par exemple, une question à choix multiples ou une question vrai ou faux). Le terme « solution », pour sa part, représente le travail réalisé par un élève pour l'amener à résoudre un problème ou à répondre à une question fermée.

[86] Voir p. 87 pour un aperçu des cinq preuves présentées aux élèves.

que nous permettons aux élèves de modifier leur classement, au besoin, à l'activité 1 (travail sur papier). Toutefois, lors de la reprise de cette question, l'un des enseignants du groupe contrôle ne comprend pas la consigne. Croyant que nous demandons aux élèves d'écrire le même classement à la question *Pré(Ind)-2a* et à la question *Act1(Ind)-2*, il ne leur demande pas de revoir leur classement et passe tout de suite à la partie de la première activité où les élèves travaillent en équipe.

Lors de la première activité, des problèmes ont également fait surface avec le forum électronique. Les élèves pouvaient lire le message initial placé en ligne, mais ils n'étaient pas en mesure d'y répondre (ils obtenaient un message d'erreur). Par conséquent, les deux classes du groupe expérimental n'ont pas pu participer à l'activité 1 en ligne et seul le travail sur papier a été complété. Le temps total réservé à cette activité (travail sur papier et travail en ligne) a donc entièrement été exploité en salle de classe lors du travail sur papier.

Dans le cadre de la troisième activité, lors du travail d'équipe sur papier, il y a eu un malentendu au niveau de la tâche à effectuer. Les élèves n'ont pas compris qu'ils devaient reprendre l'ensemble des arguments soulevés lors du travail d'équipe pour les écrire dans le tableau. Dans la plupart des cas, ils se sont contentés de cocher la case grise associée à leur réponse et d'inscrire les arguments en lien avec cette réponse dans la cellule blanche. Ainsi, cette partie du travail (travail d'équipe sur papier) n'est pas analysée. En ce qui a trait au travail réalisé dans le forum électronique, dû à un manque de temps, les élèves d'une des classes du groupe expérimental n'ont pas répondu aux questions *Act2(f)-5a* et *Act2(f)-5b*. Lors de la troisième activité, les activités de la même classe ont été perturbées par une tempête, l'absence de leur enseignant et l'administration d'une évaluation écrite sommative. Ainsi, dû à des contraintes de temps, les élèves de cette classe n'ont pas participé à la troisième activité dans le forum électronique. Enfin, l'une des classes du groupe expérimental (pas la même que celle qui n'a pas répondu aux questions en lien avec le problème 5) n'a pas répondu aux questions *Act4(Eq)-7a* et *Act4(Eq)-7b* sur papier.

3.4.3 <u>Analyse des productions d'élèves en lien avec les types de preuves</u>

L'analyse des productions d'élèves pouvant être associées à un type de preuves se fait à partir d'un plan de codage définitif (Miles et Huberman, 2003)[87], soit une grille

[87] Les auteurs définissent le plan de codage définitif comme un « plan de codage relativement bien défini a priori (des catégories, des mots clés) que vous allez pouvoir appliquer à vos données » (Miles et Huberman, 2003, p. 569).

d'analyse inspirée de la mise en commun des travaux de Balacheff, de Miyazaki et de Mary (figure 7, p. 69). Dans le but d'analyser les informations recueillies lors de l'expérimentation (prétest, post-test, activités et traces sauvegardées dans le forum électronique), certains changements sont amenés à la grille créée lors de la mise en commun des travaux de ces auteurs. Les éléments ajoutés à la grille initiale sont présentés en gras dans la figure 45 (p. 134).

Premièrement, les termes « validation » et « invalidation » sont ajoutés à la grille. À notre avis, il est d'abord important de cibler le but de l'élève : désire-t-il prouver que c'est vrai ou que c'est faux? Deuxièmement, dans les différentes stratégies utilisées pour vérifier, la stratégie « par une autre méthode » est éliminée. Dans notre analyse, nous désirons identifier cette « autre méthode ». Les méthodes qui émergent de notre analyse sont précisées à la section *4.2 Types de preuves et méthodes présentés par les élèves* (p. 140). Par surcroît, l'argumentation est ajoutée à notre grille (elle remplace la validation par autorité, qui consiste en un type d'argumentation). Étant donné qu'elle peut faire obstacle au développement de preuves (Balacheff, 1999), elle est isolée des preuves pragmatiques et des preuves intellectuelles afin de lui donner son propre statut. Enfin, l'un des plus grands changements apportés à la grille d'analyse est la disposition des éléments. En effet, contrairement à Mary qui identifie d'abord le type de preuves (par exemple, empirisme naïf) pour ensuite cibler plus précisément la stratégie utilisée (tableau de valeurs, dessins, etc.), la grille suggérée propose de s'y prendre dans le sens inverse. À notre avis, il est plus simple d'identifier premièrement ce que l'élève a fait pour ensuite l'associer à un type de preuves.

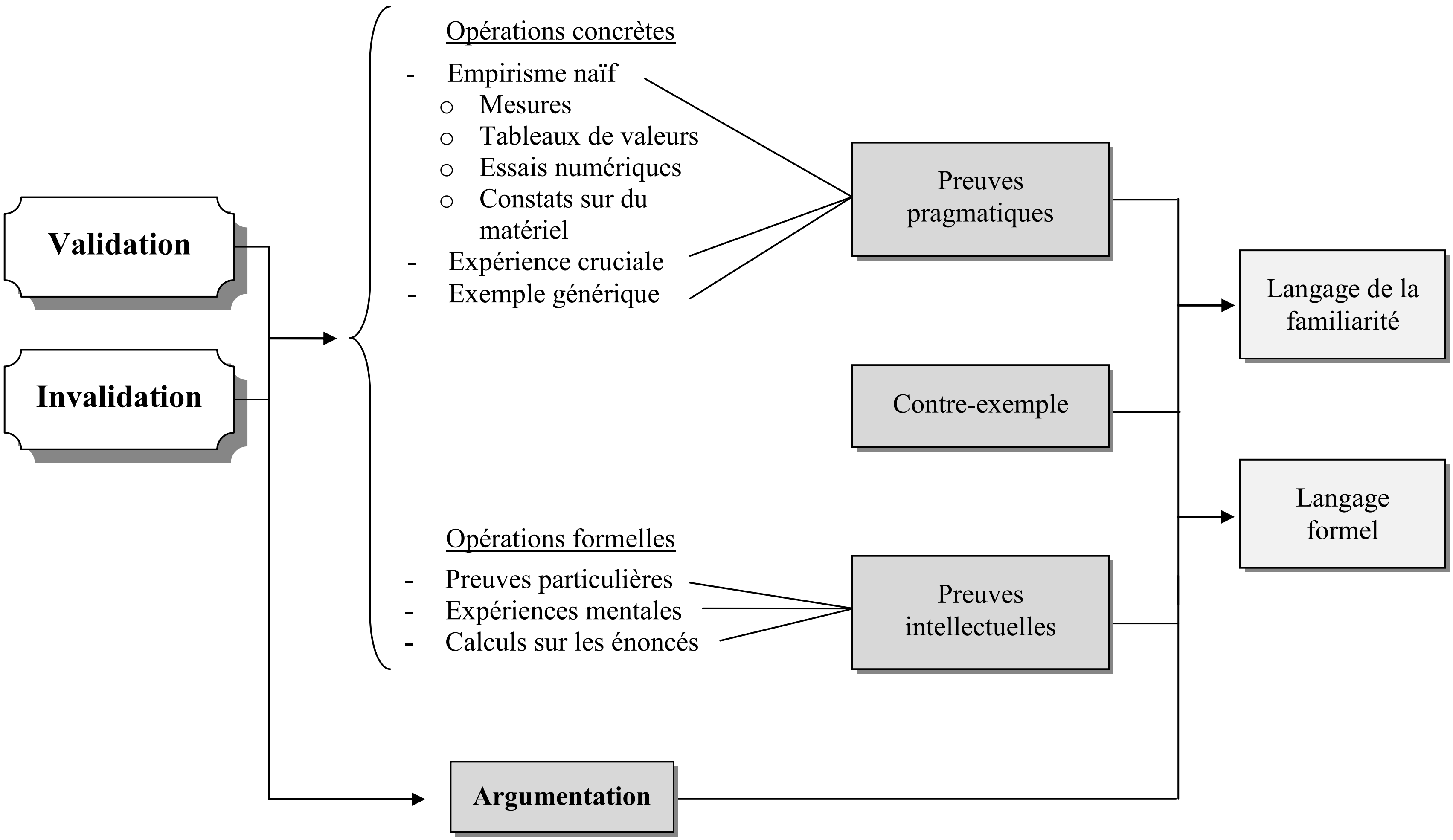


Figure 45. Grille d'analyse des productions d'élèves pouvant être liées au développement de preuves.

3.4.4 Analyse des productions d'élèves en lien avec l'évaluation de preuves

Afin d'assurer la cohérence interne des données, l'analyse des informations en lien avec l'évaluation de preuves se fait à partir d'un codage unique, soit un codage où chaque segment est associé à un seul code. L'unité d'analyse est donc une phrase, un segment de phrase ou un bloc fait de plusieurs phrases dans lequel apparaît une idée. Des liens sont par la suite faits entre ces idées et les règles du débat mathématique telles qu'énoncées par Arsac et al. (1992).

3.4.5 Analyse des entretiens semi-directifs

L'analyse des informations recueillies lors des entretiens semi-directifs avec les enseignants et les élèves se fait à partir du même type de codage que l'analyse des productions d'élèves, c'est-à-dire un codage unique où l'unité d'analyse est une phrase, un segment de phrase ou un bloc fait de plusieurs phrases dans lequel apparaît une idée. Le maître code suivant a servi à l'élaboration de ces questions : 1) Informations générales; 2) Mathématiques (notion de preuve); 3) Intégration des TIC; 4) Réalisation des activités; 5) « Évaluation » des activités; 6) Apport des activités et 7) Apport du forum électronique. Rappelons que les données ainsi recueillies visent principalement la triangulation des données.

4. ANALYSE DES DONNÉES

Dans ce chapitre, nous dressons un portrait du travail réalisé par des élèves du secondaire lorsqu'ils se retrouvent en situation de validation en salle de classe ou dans un forum électronique. Afin d'en faciliter la lecture, nous exposons en bloc les résultats et l'analyse des résultats. Dans un premier temps, nous présentons le profil des enseignants et des élèves qui participent à notre projet de recherche. Par la suite, un portrait du profil technologique des élèves du groupe expérimental est tracé. Enfin, c'est dans ce chapitre que nous tentons de répondre à nos deux questions de recherche. Nous nous penchons donc non seulement sur les types de preuves développées par les élèves, mais également sur les règles du débat mathématique qu'ils mettent en œuvre lorsqu'ils ont à valider ou à invalider leur travail ou celui des autres.

4.1 Participants

Étant donné que notre projet de recherche comporte un recours à des êtres humains, un certificat d'éthique témoignant le respect des normes de déontologie de la politique sur la recherche avec les êtres humaines de l'Université de Montréal a été obtenu (annexe 20, p. 376).

Dans le cadre de notre étude, quatre enseignants de 8^{e} année (secondaire II) participent au projet. La population effective diffère toutefois un peu de la population souhaitée, décrite dans la section *3.2.2 Recrutement des participants* (p. 121). Au départ, des classes semblables en ce qui a trait au niveau scolaire, au milieu socio-économique, au nombre d'élèves dans la classe et au nombre d'années d'expérience avec le site Internet était visé. Pour des raisons professionnelles (évoquées par les enseignants), pratiques ou autres, certains enseignants ne sont pas retenus pour le projet de recherche[88]. Ainsi, parmi les dix enseignants qui nous ont fait part de leur intérêt à participer au projet, seuls quatre d'entre eux peuvent être considérés. Deux de ces enseignants œuvrent au Nouveau-Brunswick alors que les deux autres enseignent au Québec. Les deux enseignants néo-brunswickois proviennent de districts scolaires différents, soit le district 1 (région de Dieppe) et le district 3 (région d'Edmundston). Les deux enseignants québécois, quant à eux, font partie de la même commission scolaire, soit la commission scolaire Marguerite-Bourgeoys (région de Montréal). Tous ces enseignants ont toujours enseigné les

[88] Par exemple, un enseignant a précisé qu'il ne pourrait prendre part au projet en raison du manque de temps. Un autre n'a pas été retenu, car son enseignement ne se faisait pas au niveau régulier.

mathématiques et ils enseignent actuellement à des élèves qui en sont à leur huitième année de scolarité. Ils ont un minimum de cinq ans d'expérience en enseignement et un minimum de quatre ans d'expérience en 8e année (secondaire II). Les deux enseignants avec le plus d'expérience en enseignement se retrouvent dans le groupe contrôle et les deux enseignants avec le moins d'expérience se retrouvent dans le groupe expérimental[89]. Il importe de noter que les deux enseignants faisant partie du groupe expérimental ont déjà utilisé un forum électronique (pas nécessairement celui du CASMI) avant le début de l'expérimentation. Ils ont également de l'expérience au niveau de l'intégration des TIC dans leurs cours de mathématiques (par exemple, des logiciels de géométrie dynamique ou des sites Internet présentant des séries d'exercices touchant différents contenus mathématiques). De plus, un des deux enseignants du groupe expérimental a utilisé le site Internet du CASMI avec ses élèves avant sa participation au projet. Ses élèves ont résolu des problèmes en ligne et quelques-uns ont créé des problèmes afin qu'ils soient publiés sur le site.

L'ensemble des élèves de ces quatre enseignants, soit 125 au total, a été approché pour participer au projet. Parmi ces élèves, cinq n'apparaissent pas dans les résultats présentés, car leurs parents refusent que les données anonymisées recueillies soient utilisées dans le cadre de notre recherche. Un sixième élève est également éliminé du lot, car il n'a pas répondu au prétest et au post-test. Le groupe contrôle comprend 62 élèves alors que le groupe expérimental en comprend 57 (tableau VII, p. 137).

Tableau VII. Nombre d'élèves dans chacune des classes

	Province	Nombre d'élèves	Total
Groupe contrôle	Nouveau-Brunswick	34	62
	Québec	28	
Groupe expérimental	Nouveau-Brunswick	30	57
	Québec	27	
			119

Il importe de noter que bien que les effectifs demeurent les mêmes tout au long de l'expérimentation, il arrive, à cause de l'absence d'un ou de plusieurs élèves lors de la

[89] Au départ, l'un des deux enseignants avec le plus d'années d'expérience en enseignement devait faire partie du groupe expérimental. Or, à cause du manque d'accessibilité au laboratoire informatique, cet enseignant a préféré faire partie du groupe contrôle.

réalisation d'une activité, que l'effectif des tableaux diffère légèrement de ceux-ci. Dans tous les cas, le nombre total d'élèves concernés est indiqué.

Les formulaires de consentement des enseignants du groupe contrôle et du groupe expérimental sont présentés, respectivement, à l'annexe 21 (p. 377) et à l'annexe 22 (p. 380). Le formulaire de consentement s'adressant aux parents du groupe contrôle se trouve à l'annexe 23 (p. 383), alors que celui destiné aux parents du groupe expérimental est à l'annexe 24 (p. 386). Il importe de noter que les élèves sont au courant qu'ils sont engagés dans un processus les amenant à développer leurs habiletés à prouver et à justifier, car l'objectif de la recherche est clairement identifié dans chacun des formulaires. Les enseignants l'ont également mentionné aux élèves.

4.1.1 Profil technologique des élèves du groupe expérimental

L'une des composantes clés de notre recherche repose sur le fait que les élèves faisant partie du groupe expérimental échangent dans un forum électronique. Ainsi, lors de l'administration du post-test, nous nous intéressons à différents éléments touchant l'utilisation des TIC dans le quotidien de ces élèves afin d'être en mesure de dresser un certain portrait de leur profil technologique. Entre autres, nous vérifions s'ils ont accès à Internet à la maison afin de savoir s'ils ont, par le fait même, accès au forum électronique à l'extérieur des heures de classe. Au total, 90 % des élèves du groupe expérimental confirment avoir accès à Internet à la maison. Les autres élèves n'ont pas répondu à cette question.

Or, malgré le fait que la majorité des élèves ont accès au forum électronique à la maison, pendant toute la durée du projet, un seul message a été écrit à l'extérieur des heures de classe. Comment expliquer ce peu de participation? Malheureusement, nous ne sommes pas en mesure de répondre de façon définitive à cette question. Nous possédons toutefois quelques pistes nous permettant de poser certaines conjectures. Premièrement, l'utilisation d'un nouvel outil informatique, quel qu'il soit, demande un certain temps d'appropriation. Le manque de familiarité avec l'utilisation d'un forum électronique pourrait donc expliquer, du moins en partie, le fait que les élèves du groupe expérimental n'aient pas participé aux échanges en ligne à l'extérieur des heures de classe. En effet, seulement sept élèves du groupe expérimental ont dit avoir déjà utilisé un forum électronique avant d'utiliser celui retrouvé dans le CASMI. Toutefois, les données à propos de la convivialité du forum du CASMI recueillies lors du post-test montrent que 79 % des élèves du groupe expérimental trouve que cet outil de communication en ligne est facile d'utilisation. Il semble donc que cette première conjecture ne puisse être retenue.

Le manque d'intérêt, que ce soit pour l'outil de communication en ligne ou pour le projet en tant que tel, pourrait expliquer la très faible participation des élèves du groupe expérimental dans le forum électronique à l'extérieur du cours de mathématiques. À cet effet, les données recueillies lors des entrevues qui ont eu lieu après l'expérimentation nous permettent de vérifier, entre autres, si les élèves ont apprécié ou non travailler dans un forum électronique. Parmi les six élèves du groupe expérimental interrogés, cinq affirment avoir aimé travailler dans le forum électronique. Seul un élève dit ne pas vraiment avoir aimé travailler dans le forum électronique, et ce, principalement à cause du manque de convivialité de l'outil. Bien que nous ne soyons pas en mesure de généraliser cette appréciation pour l'outil de communication en ligne à l'ensemble des élèves du groupe expérimental, il demeure intéressant de constater que la majorité des élèves interrogés aiment travailler dans le forum électronique. Les résultats nous laissent supposer que les élèves trouvent non seulement facile d'utiliser le forum électronique dans le CASMI, mais ils aiment également travailler dans ce forum dans le cadre de leur cours de mathématiques[90]. Il est donc plutôt difficile de cibler la cause exacte du peu de participation des élèves au forum électronique à l'extérieur des heures de classe.

Une troisième conjecture concernant les éléments pouvant influencer la participation des élèves du groupe expérimental aux échanges en ligne à l'extérieur des heures de classe est liée à l'importance que les enseignants attribuent aux échanges dans le forum électronique. Insistent-ils sur l'utilisation du forum à l'extérieur des heures de classe? Les élèves pensent-ils que l'utilisation du forum est réservée aux activités faites lors du cours de mathématiques?

Enfin, il apparaît pertinent de se demander si l'utilisation du forum électronique à l'extérieur des heures de classe est nécessaire ou même utile pour les élèves. Lors des entretiens, tous les élèves affirment avoir eu suffisamment de temps pour compléter les activités lors de leur cours de mathématiques Pourquoi alors se seraient-ils rendus dans le forum électronique pour continuer les échanges si, à leurs yeux, l'activité était complétée?

---

[90] Aucune information supplémentaire n'est disponible en ce qui a trait aux détails qui font que les élèves aiment utiliser le forum électronique.

Se sont-ils privés de quelque chose en n'y allant pas? Est-il utopique de notre part de penser que les élèves souhaiteraient poursuivre la discussion en ligne par simple intérêt?

4.2 Méthodes utilisées par les élèves pour les trois types de tâches expérimentées

À travers la réalisation des différentes activités, les élèves ont essentiellement accompli trois types de tâches : rechercher une régularité et décrire une procédure permettant de prédire le nombre d'objets dans une figure quelconque, développer une preuve afin de valider ou d'invalider un énoncé mathématique et classer différents types de preuves de la plus convaincante à la moins convaincante. Afin d'être en mesure d'analyser le travail réalisé par les élèves, l'ensemble des méthodes utilisées par ces derniers pour résoudre les problèmes ont été recensées et associées aux méthodes identifiées dans le schéma des différents types de preuves développés à partir des travaux de Balacheff, de Miyazaki et de Mary (figure 9, p. 72). Étant donné que lors de la résolution de problèmes faisant appel à la recherche de régularités les élèves n'ont pas à valider ou invalider un énoncé, nous ne pouvons prétendre qu'ils développent des preuves. Ils doivent tout simplement trouver une façon qui, selon eux, fonctionne et non prouver que cette façon fonctionne. La catégorisation relève donc davantage, pour les problèmes de recherche de régularités, d'une analyse du niveau de généralité et de formalisme en jeu dans les productions des élèves.

Certaines méthodes, présentes dans le schéma des différents types de preuves, n'apparaissent pas dans les productions des élèves. Par exemple, les méthodes « mesures » et « constat sur matériel » n'ont pu être observées, car il aurait fallu être sur place lors de l'expérimentation. Les essais numériques, associés à la méthode essais/erreurs, sont également laissés de côté lors de notre analyse, car une telle façon de faire ne se prête pas aux types de problèmes suggérés aux élèves lors de l'expérimentation. De plus, à travers les analyses des productions d'élèves, plusieurs méthodes qui n'apparaissent pas dans le schéma des différents types de preuves émergent. Ainsi, les méthodes qui émergent de l'analyse des productions d'élèves et celles qui n'apparaissent pas dans ces productions nécessitent certaines modifications (ajouts et retraits) au schéma des différents types de preuves. La figure 46 (p. 141) résume le résultat de notre analyse. Les éléments ajoutés au schéma initial sont présentés en italique.

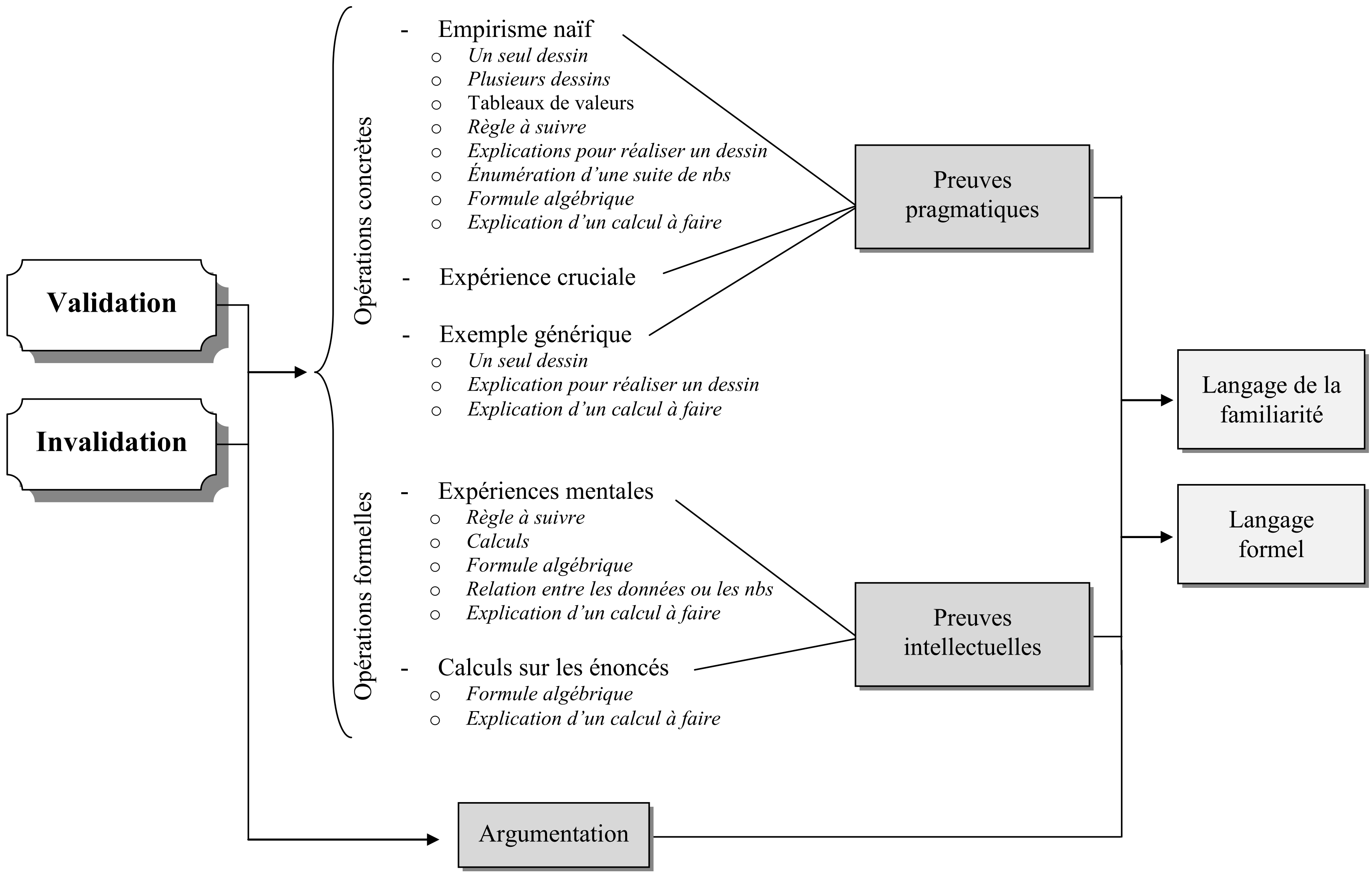


Figure 46. Méthodes utilisées par les élèves en association avec les éléments du cadre théorique.

Une liste des méthodes utilisées par les élèves des deux groupes lors de la résolution des différents problèmes ainsi qu'une brève description de chacune d'entre elles sont présentées ci-dessous. Les méthodes 1 à 4 sont associées à un travail pragmatique, car les élèves utilisent des opérations concrètes sur des dessins ou des nombres particuliers. Les méthodes 5 à 9 sont associées à un travail pragmatique ou à un travail intellectuel en considérant le niveau de langage utilisé, le degré de généralité et le type d'opération utilisé.

1) Plusieurs dessins : l'élève réalise plusieurs dessins pour trouver la réponse recherchée.
2) Un seul dessin : l'élève réalise un seul dessin, se rendant compte qu'il est possible, après avoir compris la façon dont le dessin doit être tracé, de n'en faire qu'un pour trouver la réponse recherchée.
3) Explications pour réaliser un dessin : lors de la résolution des problèmes touchant la recherche de régularités, l'élève précise les étapes à suivre afin de produire un dessin qui respecte le principe présenté dans le problème initial.
4) Tableau de valeurs : l'élève produit un tableau dans lequel il associe le numéro de la figure au nombre d'objets recherchés pour cette figure.
5) Règle à suivre : Dans les problèmes de recherche de régularités, l'élève précise la règle à suivre pour passer d'une figure à la suivante (ex : toujours additionner 3).
6) Calculs : l'élève présente un ou plusieurs calculs sans explication.
7) Explication d'un calcul à faire : plutôt que de présenter la solution sous force d'une expression algébrique, l'élève la présente sous forme de texte où chaque calcul devant être fait est expliqué.
8) Relations entre les données ou les nombres : l'élève précise certaines relations qui existent entre les nombres (par exemple, 10 est un multiple de 5). Cette méthode est principalement utilisée lors de la validation ou de l'invalidation d'énoncés mathématiques.
9) Expression algébrique : l'élève suggère une expression algébrique ou une formule algébrique pour trouver le nombre d'objets dans une figure quelconque ou utilise de l'algèbre pour valider ou invalider un énoncé mathématique.

La prochaine section présente l'analyse des résultats liés au travail effectué par les élèves alors qu'ils développent des preuves.

4.3 1re question de recherche : habiletés de validation algébrique – Développement de preuves

Les situations de validation sont au cœur de notre projet de recherche et l'un des principaux éléments qui nous intéressent repose dans le type de preuves que les élèves développent lors des différentes activités qui leur sont proposées. À quatre reprises, les élèves valident ou invalident un énoncé mathématique en présentant une preuve. Chaque preuve soumise par les élèves est associée à un contre-exemple ou à l'un des cinq types de preuves retrouvés dans la typologie de Balacheff (1987), soit l'empirisme naïf, l'expérience cruciale, l'exemple générique, l'expérience mentale ou le calcul sur les énoncés.

Dans tous les tableaux où les solutions des élèves sont en jeu, un numéro est attribué à chaque catégorie :

0. Aucun travail;
1. Empirisme naïf;
2. Expérience cruciale;
3. Exemple générique;
4. Contre-exemple;
5. Expérience mentale;
6. Calcul sur les énoncés;
7. Inclassable.

Dans les tableaux des analyses, l'ensemble des catégories sont toujours classées dans le même ordre. Cette façon de faire est adoptée afin de faciliter la lecture des différents tableaux. Si une catégorie n'est pas représentée dans le travail des élèves, elle n'est pas incluse dans le tableau. Cette absence est donc facilement repérable dans le tableau, sans pour autant contribuer à sa surcharge. Certains élèves présentent deux solutions différentes (qui les mènent à la même réponse finale). Dans les tableaux englobant les résultats des deux groupes, toutes les solutions présentées par les élèves sont identifiées. Le seul cas où la présence de deux catégories dans une production d'élève n'entraîne pas la comptabilisation de deux solutions est lorsqu'un élève présente quelques exemples pour ensuite aboutir à la présentation d'un contre-exemple. Une telle solution est seulement associée au contre-exemple.

L'évolution des types de preuves les plus développées par les élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental aux questions *Pré(Ind)-3*, *Act2(Ind)-4*, *Act2(Ind)-5* et

Post(Ind)-10 est présentée à la figure 47 (p. 144). Les principaux types de preuves développés par les élèves sont présentés plus en détail dans le tableau VIII (p. 146).

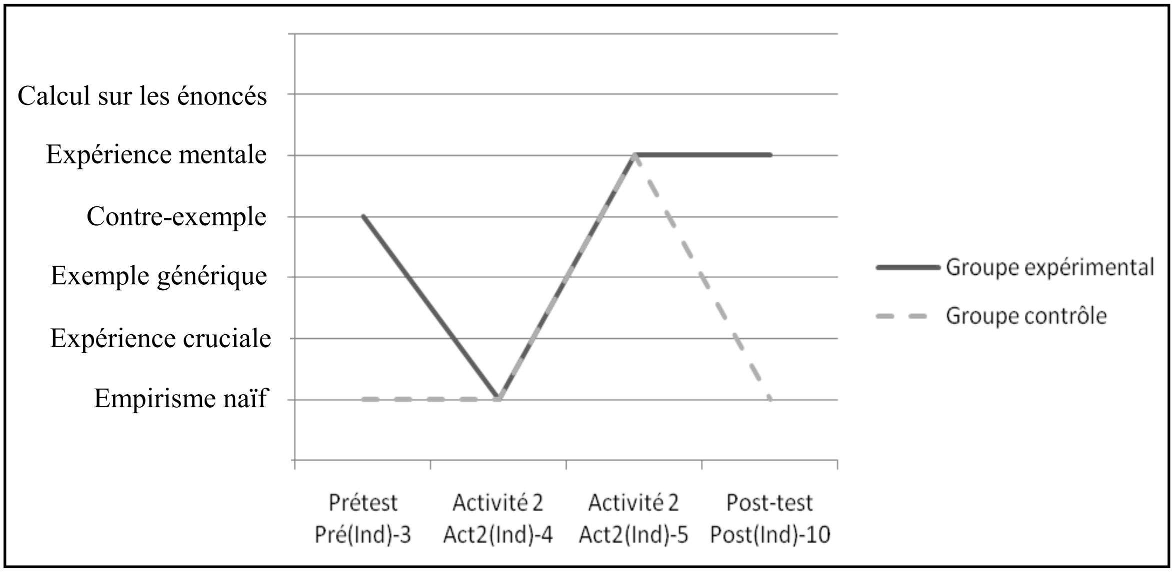


Figure 47. Évolution des types de preuves les plus développés par les élèves des deux groupes aux questions Pré(Ind)-3, Act2(Ind)-4, Act2(Ind)-5 et Post(Ind)-10

L'analyse des données conduit à deux principaux constats. D'abord, au prétest, les deux groupes apparaissent plus ou moins semblables en ce qui a trait à la production de preuves. Or, la figure 47 (p. 144) ne présente que le type de preuve développé par le plus grand nombre d'élèves dans chaque groupe. Une analyse plus approfondie des résultats permet de constater que, chez le groupe expérimental, seul un élève de plus présente un contre-exemple qu'une preuve par empirisme naïf (tableau VIII, p, 146). Ainsi, au départ, les élèves des deux groupes semblent démontrer une plus grande disposition à utiliser des preuves par empirisme naïf. De plus, l'évolution des types de preuves diffère entre les deux groupes. Chez le groupe contrôle, le passage par l'expérience mentale à la question *Act2(Ind)-5* apparaît comme une irrégularité, car toutes les autres questions génèrent principalement des preuves par empirisme naïf chez les élèves de ce groupe. Chez le groupe expérimental, il semble davantage y avoir une tendance pour les preuves intellectuelles, alors que seule la question *Act2(Ind)-4* amène les élèves à opter davantage pour des preuves par empirisme naïf. Cette différence entre les deux groupes est peut-être due à la prédisposition du groupe expérimental pour les preuves intellectuelles lors du prétest. Nous y porterons une attention particulière dans les sections suivantes.

Tableau VIII. Fréquence et pourcentage[91] de chaque type de preuves développé par les élèves de chacun des deux groupes aux questions Pré(Ind)-3, Act2(Ind)-4, Act2(Ind)-5 et Post(Ind)-10

	Groupe contrôle								Groupe expérimental							
	Pré(Ind)-3 (n = 61)		Act2(Ind)-4 (n = 49)		Act2(Ind)-5 (n = 69)		Post(Ind)-10 (n = 49)		Pré(Ind)-3 (n = 47)		Act2(Ind)-4 (n = 49)		Act2(Ind)-5 (n = 57)		Post(Ind)-10 (n = 43)	
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
0. Aucune preuve	3	5	0	0	1	1	2	4	0	0	1	2	4	7	5	12
1. Empirisme naïf	30	49	31	63	31	45	27	55	12	25	21	43	16	28	7	16
2. Expérience cruciale	6	10	1	2	4	6	3	6	6	13	3	6	6	11	1	2
3. Exemple générique	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	5
4. Contre-exemple	10	16	6	12	0	0	8	17	13	28	11	23	2	3	6	14
5. Expérience mentale	8	13	10	21	32	47	6	12	10	21	9	18	25	44	18	42
6. Calcul sur les énoncés	1	2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7. Inclassable	3	5	0	0	1	1	3	6	6	13	4	8	3	5	4	9
Total	61	100	49	100	69	100	49	100	47	100	49	100	57	100	43	100

[91] Lorsque le nombre de répondants est inférieur ou égal à 40, seules les fréquences sont présentées dans les tableaux. Dans les autres cas, les fréquences et les pourcentages sont inclus. Notons que les pourcentages sont arrondis dans tous les tableaux pour faciliter la lecture et éviter l'illusion de précision (des nombres rationnels sont toutefois présentés dans quatre tableaux, car les effectifs sont trop petits pour nous permettre d'arrondir sans modifier les résultats).

Notons que pour les deux groupes, il y a un passage qui se fait des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles entre les questions *Act2(Ind)-4* et *Act2(Ind)-5*. Ce qui est surprenant, c'est que ces deux questions font partie de la même activité[92]. Il n'y a donc pas d'intervention de l'enseignant ou d'échanges dans le forum électronique entre ces questions.

4.3.1 Productions des élèves sur le développement de preuves au prétest (Pré(Ind)-3)

Dans un des problèmes faisant partie du prétest (question *Pré(Ind)-3*), les élèves doivent préciser si l'énoncé suivant est vrai ou faux : *La somme de 2 nombres impairs consécutifs est toujours multiple de 4*. Nous leur demandons également de justifier leur réponse afin de réellement pouvoir observer le raisonnement utilisé pour valider ou invalider l'énoncé proposé.

Il est important de noter que certains élèves comprennent mal l'énoncé. En effet, l'expression « nombres impairs consécutifs » est parfois interprétée comme « nombres impairs placés l'un à la suite de l'autre ». Par conséquent, des élèves considèrent que 7 + 7 ou encore 7 + 11 sont deux nombres impairs consécutifs, car ils se « suivent » dans l'expression mathématique écrite. Étant donné que nous n'avons pas pu intervenir pour corriger cette incompréhension, nous ne pouvons prétendre que l'erreur est due à autre chose qu'à une mauvaise interprétation des données. C'est pourquoi une mauvaise réponse de la part de ces élèves doit d'abord et avant tout être associée à un problème de connaissances langagières plutôt qu'à un problème de connaissances mathématiques.

Le tableau IX (p. 148) présente les types de preuves développés par les élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental. L'absence de la catégorie 3 indique qu'aucun exemple générique n'a été présenté dans les productions des élèves des deux groupes. Une différence assez importante peut être observée entre les deux groupes en ce qui a trait au nombre d'élèves qui développent une preuve par empirisme naïf et, par le fait même, ne respectent pas la règle du débat mathématique des exemples. En effet, alors que 49 % des solutions du groupe contrôle présente ce type de preuve, seul 25 % des solutions du groupe expérimental fait de même.

[92] Elles sont remises aux élèves dans le même document et sont placées en ligne le même jour.

Tableau IX. Fréquence et pourcentage de chaque type de preuves développé par les élèves de chacun des deux groupes à la question Pré(Ind)-3[93]

	Groupe contrôle		Groupe expérimental	
	Fréquence	%	Fréquence	%
0. Aucune preuve	3	5	0	0
1. Empirisme naïf	30	49	12	25
2. Expérience cruciale	6	10	6	13
4. Contre-exemple	10	16	13	28
5. Expérience mentale	8	13	10	21
6. Calcul sur les énoncés	1	2	0	0
7. Inclassable	3	5	6	13
Total	61	100	47	100

Une différence peut également être observée au niveau des preuves associées à l'expérience mentale et à l'utilisation du contre-exemple. Dans le premier cas, 21 % des solutions des élèves du groupe expérimental utilisent l'expérience mentale pour justifier leur réponse. Ce pourcentage est de 13 % chez le groupe contrôle. En ce qui a trait à l'utilisation du contre-exemple, 16 % des preuves des élèves du groupe contrôle y font référence, alors que chez le groupe expérimental, ce pourcentage est de 28 %. Évidemment, les élèves qui présentent un contre-exemple respectent la règle en lien avec l'utilisation d'un contre-exemple pour invalider un énoncé

Les deux prochaines sections permettent de voir la qualité des preuves soumises par les élèves alors qu'ils ont à valider ou à invalider l'énoncé mathématique en jeu.

4.3.1.1 Groupe contrôle

Les différentes réponses données par les élèves du groupe contrôle à la question Pré(Ind)-3 sont présentés dans le tableau X (p. 148).

Tableau X. Fréquence et pourcentage des réponses des élèves du groupe contrôle à la question Pré(Ind)-3

	Fréquence	%
Pas précisé vrai ou faux	1	2
Vrai (réponse correcte)	41	73
Faux (réponse incorrecte)	13	23
Vrai et faux	1	2
Total	56	100

[93] La valeur de *n* représente le nombre total de preuves développées par les élèves. Étant donné que certains élèves ont développé deux preuves, cette valeur dépasse le nombre total d'élèves.

Parmi les 56 élèves de ce groupe qui ont répondu au prétest, 73 % savent correctement déterminer la justesse mathématique de l'énoncé proposé (« vrai ») alors que 23 % affirment que l'énoncé est faux. Cette réponse (faux) provient presque toujours d'une faute de calcul qui transforme l'exemple en contre-exemple. Un élève précise que l'énoncé mathématique est à la fois vrai et faux en s'appuyant sur deux exemples dont un contient une faute de calcul. Cette forme de contre-exemple ne suffit toutefois pas à lui faire invalider l'énoncé. Cet élève ne se conforme pas à la règle du débat mathématique sur le tiers exclu.

La majorité (67 %) des élèves ayant correctement répondu à la question présentent un travail qui ne contient aucune faute de calcul ou aucune erreur de raisonnement (tableau XI, p. 149).

Tableau XI. Fréquence et pourcentage de chaque type de preuves présenté par les élèves du groupe contrôle ayant répondu « vrai » (réponse correcte) à la question Pré(Ind)-3 et qualité du travail[94]

	Aucun travail		Travail correct		Travail partiellement correct		Travail incorrect		Total	
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
0. Aucune preuve	3	7	0	0	0	0	0	0	3	7
1. Empirisme naïf	0	0	24	54	0	0	5	11	29	65
2. Expérience cruciale	0	0	5	11	1	2	0	0	6	13
5. Expérience mentale	0	0	1	2	1	2	4	9	6	13
6. Calcul sur les énoncés	0	0	0	0	0	0	1	2	1	2
Total	3	7	30	67	2	4	10	22	45	100

La preuve liée à l'empirisme naïf est de loin la plus exploitée par ces élèves. En effet, 65 % des solutions présentent ce type de preuves pour prouver la véracité de l'énoncé et 24 fois sur 29, les élèves présentent un travail correct. L'expérience cruciale est utilisée à six reprises (13 %) et ce, de façon correcte ou partiellement correcte. Dans six solutions (13 %), les élèves se tournent vers l'expérience mentale et tentent d'utiliser certaines propriétés mathématiques pour expliquer leur raisonnement. Ils le font toutefois incorrectement quatre fois sur six. Un seul élève présente un travail correct; il découvre une

[94] Dans le tableau X (p. 148), il est indiqué que 41 élèves du groupe contrôle répondent « vrai » à la question qui leur est présentée. Or, dans le tableau XI (p. 149), la valeur de *n* est égale à 45. Cela s'explique par le fait que certains élèves présentent plus d'une preuve pour justifier leur réponse. Ainsi, dans ce tableau, l'ensemble des preuves développées par les élèves est présenté.

régularité à partir de quelques exemples et se base sur la définition de l'expression « multiple de 4 » et sur le fait qu'entre chacun de ses exemples la somme augmente toujours de 4 pour prouver que l'énoncé est vrai. L'erreur la plus fréquente dans les preuves par expérience mentale consiste à dire que vu que la somme obtenue dans tous les cas présentés est paire, alors la somme obtenue sera toujours un multiple de 4. Or, tous les nombres pairs ne sont pas divisibles par 4. Cet argument, bien qu'il présente une piste pouvant être exploitée pour répondre à cette question, n'est pas suffisant pour prouver l'énoncé.

Au nombre des 14 élèves qui ont répondu « faux » ou « vrai et faux » (réponse incorrecte) à cette question, 10 élèves font des fautes de calcul alors qu'ils développent une preuve empirique. Ainsi, leur preuve initiale devient un contre-exemple et ils tirent la mauvaise conclusion, tout en utilisant correctement l'une des règles du débat mathématique (tableau XII, p. 150).

Tableau XII. Fréquence de chaque type de preuves présenté par les élèves du groupe contrôle ayant répondu « faux » ou « vrai et faux » (réponse incorrecte) à la question Pré(Ind)-3 et qualité du travail

	Aucun travail	Travail correct	Travail incorrect	Total
1. Empirisme naïf	0	1	0	1
4. Contre-exemple	0	0	10	10
5. Expérience mentale	0	0	2	2
7. Inclassable	3	0	0	3
Total	3	1	12	16

4.3.1.2 <u>Groupe expérimental</u>

Alors que dans le groupe contrôle, la majorité des élèves déterminent correctement la justesse de l'énoncé mathématique proposé, soit que la somme de deux nombres impairs consécutifs est toujours un multiple de 4, 42 % des élèves du groupe expérimental répondent que l'énoncé est vrai, alors que 45 % répondent qu'il est faux (tableau XIII, p. 151). Comme pour le groupe contrôle, une réponse incorrecte provient majoritairement d'une faute de calcul conduisant à un faux contre-exemple. Étudions plus en détail le travail fait par les élèves de ce groupe afin de voir de quelles façons il s'approche ou s'éloigne de celui fait par les élèves du groupe contrôle.

Tableau XIII. Fréquence et pourcentage des réponses des élèves du groupe expérimental à la question Pré(Ind)-3

	Fréquence	%
Pas précisé vrai ou faux	7	13
Vrai (réponse correcte)	22	42
Faux (réponse incorrecte)	24	45
Total	53	100

Tout comme c'est le cas pour le groupe contrôle, la majorité des solutions du groupe expérimental (14 sur 22) dans lesquelles il est précisé que l'énoncé mathématique est « vrai » (réponse correcte) présentent un travail complet et sans erreur (tableau XIV, p. 151).

Tableau XIV. Fréquence de chaque type de preuves présenté par les élèves du groupe expérimental ayant répondu « vrai » (réponse correcte) à la question Pré(Ind)-3 et qualité du travail

	Aucun travail	Travail correct	Manque de précision	Travail partiellement correct	Travail incorrect	Total
1. Empirisme naïf	0	9	0	1	1	11
2. Expérience cruciale	0	5	0	0	0	5
5. Expérience mentale	0	0	3	0	1	4
7. Inclassable	2	0	0	0	0	2
Total	2	14	3	1	2	22

La moitié des solutions des élèves du groupe expérimental (11 sur 22) qui identifient l'énoncé comme étant vrai (réponse correcte) se tournent vers l'empirisme naïf pour justifier leur réponse et toutes sauf une présentent un travail correct ou partiellement correct. Dans quatre cas, les élèves tentent de prouver que l'énoncé est vrai à travers une expérience mentale, mais trois de ces solutions manquent de précision dans leur élaboration. Ce manque de précision est associé à la répétition de l'énoncé dans des termes sensiblement similaires à ceux utilisés initialement. Les élèves n'apportent donc pas d'arguments mathématiques supplémentaires pour justifier leur réponse.

Notons que l'expérience mentale est aussi utilisée à six reprises pour montrer que l'énoncé est faux. Chaque fois, il s'agit d'un usage incorrect ou partiellement correct (tableau XV, p. 152).

Tableau XV. Fréquence de chaque type de preuves présenté par les élèves du groupe expérimental ayant répondu « faux » ou « vrai et faux » (réponse incorrecte) à la question Pré(Ind)-3 et qualité du travail

	Aucun travail	Travail incorrect	Travail partiellement correct	Total
1. Empirisme naïf	0	1	0	1
2. Expérience cruciale	0	1	0	1
4. Contre-exemple	0	12	1	13
5. Expérience mentale	0	5	1	6
7. Inclassable	4	0	0	4
Total	4	19	2	25

Somme toute, pour le groupe expérimental, c'est le contre-exemple qui arrive au premier rang des types de preuves touchés dans les productions des élèves. Cependant, ces contre-exemples découlent de fautes de calcul et mènent les élèves à tirer des conclusions erronées. L'empirisme naïf suit et est toujours utilisé correctement, à trois exceptions près. Enfin, l'expérience mentale est toujours utilisée incorrectement, sauf à une occasion où le travail présenté est partiellement correct.

4.3.1.3 Observations générales à la suite de l'analyse de la question Pré(Ind)-3

La majorité des élèves du groupe contrôle (73 %) est en mesure d'identifier correctement la véracité de l'énoncé, soit que la somme de deux nombres impairs consécutifs est toujours multiple de 4. Cependant, seuls 42 % des élèves du groupe expérimental sont capables de le faire. Au niveau des types de preuves développés pour justifier leur réponse, les élèves des deux groupes utilisent principalement les deux mêmes types de preuves, soit l'empirisme naïf et le contre-exemple, mais pas dans les mêmes proportions.

Chez le groupe contrôle, la majorité des élèves qui répondent correctement à la question (65 %) utilisent l'empirisme naïf pour expliquer leur réponse. Parmi les 13 élèves qui répondent incorrectement à la question, 10 font des fautes de calcul dans leur preuve empirique, ce qui les amène à présenter un « faux » contre-exemple. Encore une fois, ce sont clairement les preuves pragmatiques, plus précisément celles en lien avec l'empirisme naïf, qui sont majoritairement développées par les élèves du groupe contrôle.

Chez le groupe expérimental, environ le même pourcentage d'élèves répondent correctement (« vrai ») et incorrectement (« faux ») à la question *Pré(Ind)-3*. Ces pourcentages sont respectivement de 42 % et 45 %. Dans la moitié des solutions (11/22) dans lesquelles il est indiqué que l'énoncé est vrai, les élèves utilisent l'empirisme naïf pour justifier leur choix. Ce taux est plus élevé chez le groupe contrôle (29/45). Parmi les 25 élèves qui indiquent que l'énoncé est faux, 12 font des fautes de calculs et basent leur réponse sur un « faux » contre-exemple. Enfin, plus d'élèves du groupe expérimental que du groupe contrôle développent une preuve intellectuelle, plus précisément une preuve associée à l'expérience mentale, pour expliquer leur réponse. Chez les élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental qui répondent correctement (« vrai ») à la question, ce taux est respectivement de 6/45 et de 4/22. Chez les élèves qui répondent à tort que l'énoncé de départ est faux, le taux de preuves par expérience mentale est de 2/16 chez le groupe contrôle et de 6/25 chez le groupe expérimental. Ce souci de développer une preuve plus intellectuelle chez les élèves du groupe expérimental cause certains problèmes, car près du quart d'entre eux qui répondent incorrectement à la question développent ce type de preuves.

4.3.2 Productions des élèves sur le développement de preuves pendant l'enseignement (Act2(Ind)-4)

Lors de la deuxième activité, les élèves doivent répondre à la question suivante : « Dans l'expression $n \times n - n + 11$, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre premier? ». Ils doivent également expliquer ce qui les pousse à répondre « oui » ou « non » à cette question. Les différents types de preuves développés par les élèves de chacun des deux groupes sont présentés au tableau XVI (p. 154).

Dans les deux groupes, la preuve à laquelle les élèves recourent le plus souvent est la preuve par empirisme naïf. Ainsi, un pourcentage important de solutions (63 % chez le groupe contrôle et 43 % chez le groupe expérimental) ne respectent pas la règle du débat mathématique des exemples. Or, l'énoncé qui leur est présenté est faux (on n'obtient pas toujours un nombre premier). Les élèves doivent donc se baser sur la règle du contre-exemple pour invalider l'énoncé et non sur celle des exemples pour le valider. C'est ce dernier type de preuves qui se retrouve au deuxième rang (23 %) pour les élèves du groupe expérimental, suivi de près par l'expérience mentale au troisième rang (18 %). Pour le groupe contrôle, cet ordre est inversé. L'expérience mentale se retrouve au deuxième rang (21 %) et le contre-exemple au troisième rang (12 %). Une analyse plus approfondie des solutions soumises par les élèves est présentée dans les deux prochaines sections.

Tableau XVI. Fréquence et pourcentage de chaque type de preuves développé par les élèves de chacun des deux groupes à la question Act2(Ind)-4

	Groupe contrôle		Groupe expérimental	
	Fréquence	%	Fréquence	%
0. Aucune preuve	0	0	1	2
1. Empirisme naïf	31	63	21	43
2. Expérience cruciale	1	2	3	6
4. Contre-exemple	6	12	11	23
5. Expérience mentale	10	21	9	18
6. Calcul sur les énoncés	1	2	0	0
7. Inclassable	0	0	4	8
Total	49	100	49	100

4.3.2.1 <u>Groupe contrôle</u>

Au total, 56 élèves du groupe contrôle ont participé à la deuxième activité. Les réponses données par ces élèves à la question *Act2(Ind)-4* sont présentées dans le tableau XVII (p. 176).

Tableau XVII. Fréquence et pourcentage des réponses des élèves du groupe contrôle à la question Act2(Ind)-4

	Fréquence	%
Pas précisé oui ou non	17	30
Oui (réponse incorrecte)	32	57
Non (réponse correcte)	6	11
Oui et non	1	2
Total	56	100

Parmi ces 56 élèves, 57 % répondent à la question de façon affirmative (réponse incorrecte) tandis que 11 % d'entre eux affirment, à juste titre, que le nombre obtenu n'est pas toujours premier. Plus du quart des élèves (30 %) présentent une preuve, mais ne répondent pas explicitement à la question qui leur est posée. Enfin, un élève répond à la fois « oui » et « non » à la question. Il présente une expérience cruciale et ensuite un contre-exemple. Il est intéressant de remarquer que le contre-exemple ne suffit pas à invalider la possibilité de toujours obtenir un nombre premier. Ainsi, l'élève accorde le même poids au contre-exemple et à l'exemple et ne se conforme pas à la règle du débat mathématique en lien avec le contre-exemple.

Bien que six élèves répondent correctement à la question *Act2(Ind)-4*, aucun d'entre eux ne présente un travail entièrement correct. En effet, cinq de ces élèves, malgré le fait qu'ils présentent bel et bien un contre-exemple, soumettent une solution qui est incorrecte. Par exemple, chaque n est remplacé par un entier naturel différent. La réponse obtenue n'est donc pas un nombre premier, ce qui leur permet de bien répondre à la question, mais les contraintes énoncées ne sont pas respectées.

Parmi les élèves qui ont répondu incorrectement à cette question (« oui » ou « oui et non »), 71,5 % se contentent de présenter quelques exemples pour appuyer leur affirmation (tableau XVIII, p. 155).

Tableau XVIII. Fréquence et pourcentage de chaque type de preuves présenté par les élèves du groupe contrôle ayant répondu « oui » ou « oui et non » (réponse incorrecte) à la question Act2(Ind)-4 et qualité du travail

	Travail correct		Travail partiellement correct		Travail incorrect		Total	
	F	%	F	%	F	%	F	%
1. Empirisme naïf	23	55	1	2,5	6	14	30	71,5
2. Expérience cruciale	0	0	0	0	1	2,5	1	2,5
4. Contre-exemple	1	2,5	0	0	0	0	1	2,5
5. Expérience mentale	0	0	9	21	0	0	9	21
6. Calcul sur les énoncés	0	0	1	2,5	0	0	1	2,5
Total	24	57,5	11	26	7	16,5	42	100

La majorité des solutions (55 %) présentent une preuve par empirisme naïf sans faute de calcul ou sans erreur au niveau du raisonnement. Les élèves n'obtiennent tout simplement pas la bonne réponse parce que tous les nombres entiers naturels qu'ils choisissent les mènent à trouver un nombre premier comme réponse finale. L'expérience mentale est utilisée dans 21 % des solutions d'élèves, mais toujours de façon partiellement correcte.

En bref, il est possible d'observer que lorsque les élèves utilisent l'empirisme naïf, les calculs qu'ils présentent ne contiennent généralement aucune erreur. Cependant, étant donné qu'ils basent leur conclusion sur quelques exemples, cela les mène à une mauvaise réponse. L'expérience mentale, pour sa part, présente toujours un travail partiellement correct. Les arguments présentés étant inadéquats, cela conduit les élèves à répondre incorrectement à la question. En ce qui a trait au contre-exemple, bien que nous nous attendions à retrouver un travail sans faute de calcul ou sans erreur au niveau du raisonnement, plus particulièrement lorsque la réponse donnée est correcte, ce n'est jamais le cas, car les élèves éprouvent de la difficulté avec l'algèbre.

4.3.2.2 <u>Groupe expérimental (travail sur papier)</u>

Au total, 46 élèves répondent à la question *Act2(Ind)-4*. La majorité d'entre eux, soit 54 %, répondent incorrectement à cette question, alors que 33 % y répondent correctement (tableau XIX, p. 156).

Tableau XIX. Fréquence et pourcentage des réponses des élèves du groupe expérimental à la question Act2(Ind)-4

	Fréquence	%
Pas précisé oui ou non	4	9
Oui (réponse incorrecte)	25	54
Non (réponse correcte)	15	33
Oui et non	2	4
Total	46	100

Enfin, deux élèves (4 %) soutiennent qu'on obtient à la fois toujours un nombre premier et pas toujours un nombre premier. Est-il possible d'associer ce phénomène au fait que dans la vie de tous les jours, le terme « toujours » est parfois utilisé pour dire « presque toujours » ou encore « généralement »? Si tel est le cas, un lien peut être fait avec les obstacles d'origine épistémologique où la logique naturelle fait parfois obstacle à la logique formelle.

Chez les élèves qui concluent, à juste titre, que la réponse à la question est « non », le nombre de solutions qui présentent un travail qui ne contient aucune erreur (7 sur 16) est pratiquement le même que le nombre de solutions qui présentent un travail contenant des erreurs (8 sur 16) (tableau XX, p. 157).

Tableau XX. Fréquence de chaque type de preuves présenté par les élèves du groupe expérimental ayant répondu « non » (réponse correcte) à la question Act2(Ind)-4 et qualité du travail

	Travail correct	Travail partiellement correct	Travail incorrect	Total
1. Empirisme naïf	1	0	0	1
4. Contre-exemple	6	1	3	10
5. Expérience mentale	0	0	2	2
7. Inclassable	0	0	3	3
Total	7	1	8	16

Le type de preuves qui revient le plus souvent pour appuyer la réponse des élèves est le contre-exemple (10 sur 16). La figure 48 (p. 157) présente un exemple intéressant dans lequel un élève semble se rendre compte, pendant qu'il élabore sa solution, qu'il existe des contre-exemples[95].

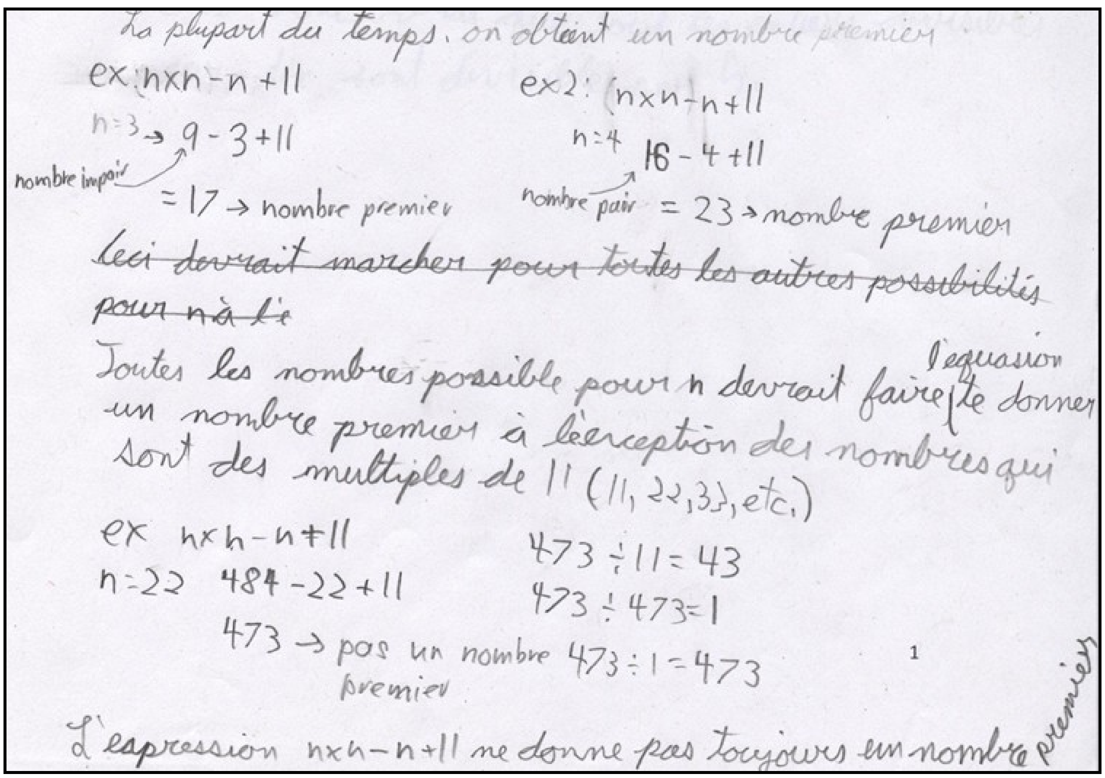


Figure 48. Contre-exemple à la question Act2(Ind)-4

Il précise, au début, que l'énoncé est vrai « la plupart du temps ». Il présente quelques exemples puis commence à écrire que cela doit fonctionner pour tous les nombres,

[95] Les traces laissées par les élèves ne nous permettent pas de comprendre comment ils font pour savoir qu'un nombre est premier ou non.

mais il change d'idée. Il va ensuite plus loin que les autres élèves et précise que l'affirmation est fausse pour tous les multiples de 11, ce qui l'amène à tirer la bonne conclusion en précisant que l'expression en question « ne donne pas toujours un nombre premier ».

Trois élèves produisent aussi de faux contre-exemples. Dans la plupart des cas, ces élèves ne comprennent pas comment manipuler des expressions algébriques. Par exemple, ils remplacent chaque n de l'expression $n \times n - n + 11$ par une valeur différente. Cela concorde avec les résultats obtenus par des chercheurs qui affirment que l'utilisation de symboles littéraux est problématique pour plusieurs élèves (Bednarz et Dufour-Janvier, 1992, 1993; Brêchet, 2003). Un autre élève débute en expliquant qu'étant donné « qu'il n'y a pas de priorités d'opérations[96] » et que la dernière opération consiste à additionner 11, on peut conclure que la réponse obtenue est toujours un nombre premier. Notons que plusieurs élèves attribuent le fait d'obtenir un nombre premier à la présence d'un nombre premier dans l'expression (dans ce cas-ci, 11). Même si les arguments utilisés par ces élèves ne sont pas pertinents dans ce contexte, étant donné qu'ils tentent de justifier leur réponse en s'appuyant sur certaines propriétés mathématiques, leur preuve est associée à l'expérience mentale. Les solutions développées par deux élèves présentent ce type de preuves.

Trente-trois preuves émergent des solutions développées par les élèves du groupe expérimental qui répondent « oui » ou « oui et non ». Elles sont répertoriées dans le tableau XXI (p. 158).

Tableau XXI. Fréquence de chaque type de preuves présenté par les élèves du groupe expérimental ayant répondu « oui » ou « oui et non » (réponse incorrecte) à la question Act2(Ind)-4 et qualité du travail

	Aucun travail	Travail correct	Travail partiellement correct	Travail incorrect	Total
0. Aucune preuve	1	0	0	0	1
1. Empirisme naïf	0	15	2	3	20
2. Expérience cruciale	0	3	0	0	3
4. Contre-exemple	0	0	0	1	1
5. Expérience mentale	0	0	0	7	7
7. Inclassable	0	0	0	1	1
Total	1	18	2	13	33

[96] Nous supposons que l'élève, en précisant qu'il n'y a pas de priorités d'opérations, souligne le fait qu'aucune parenthèse ne fait partie de l'expression de départ et que les opérations sont effectuées dans l'ordre où elles apparaissent (multiplication, soustraction puis addition).

Le type de preuves le plus utilisé est l'empirisme naïf (20 fois sur 33, les élèves optent pour ce type de preuves). Dans 15 cas, les calculs des élèves ne contiennent aucune erreur, mais leur conclusion finale est erronée, puisqu'ils ne trouvent aucun contre-exemple. Le deuxième type de preuves le plus développé par les élèves dans le cas d'une réponse incorrecte est l'expérience mentale (7 solutions sur 33) et tous les élèves qui développent ce type de preuves commettent des erreurs. La plupart d'entre eux s'appuient sur la présence du nombre 11 dans l'expression pour justifier le fait qu'ils obtiennent toujours un nombre premier.

Comme chez le groupe contrôle, le type de preuves le plus développé par les élèves du groupe expérimental qui répondent incorrectement à la question est l'empirisme naïf. Le travail ne présente habituellement aucune faute de calcul ou aucune erreur de raisonnement. Cependant, il mène les élèves à répondre incorrectement à la question, car ces derniers tirent leurs conclusions à partir de quelques exemples. C'est également le contre-exemple qui arrive au deuxième rang chez le groupe expérimental et qui permet aux élèves de répondre correctement à la question. De façon générale, le travail ne présente aucune erreur. Lorsqu'il en présente, elles sont associées à l'algèbre. Enfin, chaque fois qu'un élève développe une expérience mentale, il le fait incorrectement, et ce peu importe si la réponse donnée initialement est bonne ou mauvaise. Le groupe contrôle et le groupe expérimental se ressemblent donc relativement à l'empirisme naïf. Ils se distinguent dans la fréquence du recours au contre-exemple et à l'expérience mentale. Si les deux groupes utilisent l'expérience mentale de façon inadéquate, le groupe expérimental y a recours moins souvent qu'au contre-exemple, contrairement au groupe contrôle. Ce constat ne va donc pas dans le sens de la prédisposition proposée par le prétest.

Après avoir répondu individuellement à la question *Act2(Ind)-4*, les élèves du groupe expérimental discutent de leurs réponses en équipe (en salle de classe) puis se rendent dans le forum électronique afin de partager avec leurs collègues du Québec et du Nouveau-Brunswick. Ainsi, des traces du travail réalisé sur papier ainsi que du travail réalisé dans le forum électronique sont conservées. La prochaine section touche l'analyse des traces laissées dans le forum électronique par les élèves du groupe expérimental.

4.3.2.3 Groupe expérimental (travail dans le forum électronique)

Les échanges dans le forum visent à amener les élèves à partager leurs solutions, puis à commenter les solutions des autres élèves. Dans le cadre des échanges en ligne, le terme « participant » désigne un élève qui publie un ou plusieurs messages dans le forum électronique. Bien entendu, il est raisonnable de présumer qu'il y a plus d'élèves qui lisent les messages qu'il n'y en a qui en écrivent, car un participant peut se faire le représentant d'une équipe. Le nombre d'élèves qui participent activement aux échanges en ligne en publiant des messages ne correspond donc pas au nombre d'élèves qui peuvent profiter de l'information en ligne en lisant les messages ou les commentaires des autres.

Lors de l'activité 2, le message présenté à la figure 49 (p. 160) est placé en ligne et les élèves sont invités à y répondre.

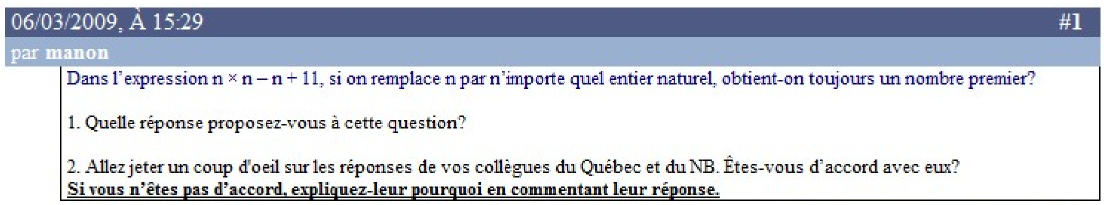


Figure 49. Message initial placé dans le forum lors de la deuxième activité (Act2(f)-4)

À la fin de l'expérimentation, ce message avait été lu 489 fois[97]. Trente-et-un élèves ont participé à l'échange et 75 messages ont été publiés. Chacun de ces messages peut avoir un ou plusieurs objectifs (par exemple, présenter une preuve ou porter un jugement sur une preuve proposée par un collègue). Les différentes catégories touchées par les messages placés en ligne par les élèves du groupe expérimental sont présentées au tableau XXII (p. 160).

Tableau XXII. Fréquence et pourcentage des idées présentes dans les messages des élèves du groupe expérimental dans le forum électronique lors de la deuxième activité (Act2(f)-4)

Catégorie	Fréquence	%
Présentation d'une preuve	18	22
Évaluation d'une preuve	37	46
Réponse seulement	4	5
Critique portant sur un autre message	3	4
Message à caractère social	14	17
Autres[98]	5	6
Total	81	100

[97] Le nombre total de fois où un message est lu est calculé à partir du nombre de clics sur ce message. Ainsi, une lecture peut correspondre à un élève qui a lu un message ou encore à plusieurs élèves (une équipe) qui ont lu un message à partir d'un même ordinateur.

[98] La catégorie « Autres » regroupe tous les cas « inintéressants » sur le plan de la didactique des mathématiques (ou du moins, dans le cadre de notre projet de recherche). Par exemple, les messages illisibles (sur papier) ou encore ceux où l'élève écrit « Je ne sais pas » (sur papier ou dans le forum électronique) se retrouvent dans cette catégorie.

Dans ce cas-ci, *n* représente le nombre total d'idées ressorties des 75 messages publiés en ligne (n = 81). Un nombre assez important des idées présentes dans les messages, soit 46 %, visent l'évaluation d'une preuve présentée par un autre élève. La deuxième catégorie de messages la plus populaire concerne la présentation d'une preuve (22 %). Il est aussi possible de remarquer que les élèves utilisent l'outil de communication à des fins sociales (17 %). Dans certains messages, qui ne sont pas considérés lors de l'analyse des données, cette utilisation est inappropriée. Ce phénomène de publication de messages inappropriés n'a été observé qu'avec les élèves d'une classe et l'enseignant s'est entretenu avec les élèves afin de revenir sur le code de vie du forum du CASMI (ce code est affiché sur le site Internet et apparaît chaque fois qu'un utilisateur désire avoir accès au forum électronique), ce qui a permis de régler le problème.

Notons que même si les deux questions présentées dans le message initial publié en ligne sont associées à une seule et même discussion, étant donné qu'elles touchent le développement de preuves et l'évaluation de preuves, elles sont traitées séparément. Dans cette section, seule la première question, qui touche le développement de preuves, est analysée. Les résultats en lien avec la deuxième question sont exploités à la section *4.5.1.3 Groupe expérimental (travail dans le forum électronique)* (p. 217).

Au total, seize messages (20 %) affichent une réponse affirmative (réponse incorrecte), soit que le nombre obtenu est toujours un nombre premier, alors que 30 messages (37 %) expriment le contraire (réponse correcte). Dans 35 autres messages (43 %), les élèves ne mentionnent aucunement si la réponse obtenue est toujours un nombre premier ou non (tableau XXIII, p. 161). Dans ce cas-ci, il n'est pas particulièrement surprenant de voir un nombre considérable d'élèves qui ne précisent pas explicitement si la réponse obtenue est toujours un nombre premier, car plusieurs messages ne visent pas nécessairement de répondre à cette question (par exemple, les messages à caractère social).

Tableau XXIII. Fréquence et pourcentage des réponses des élèves du groupe expérimental à la question Act2(f)-4a dans le forum électronique

	Fréquence	%
Pas précisé oui ou non	35	43
Oui (réponse incorrecte)	16	20
Non (réponse correcte)	30	37
Total	81	100

Les résultats obtenus dans le forum électronique, en ce qui a trait au pourcentage d'élèves qui répondent correctement à la question, concordent aux résultats obtenus sur papier. En effet, sur papier, 33 % des élèves répondent « non » (réponse correcte). Dans le forum électronique, le pourcentage de messages qui présente cette même réponse est de 37 %. La différence est plus importante au niveau des réponses incorrectes, alors que sur papier, ce pourcentage est de 54 %, il n'est que de 20 % dans les messages publiés en ligne. Il est possible que le forum électronique ait représenté un outil de validation dans le sens où, à travers la lecture des messages écrits dans le forum électronique, des élèves ont validé ou invalidé leur réponse avant de la mettre en ligne. Cela pourrait expliquer pourquoi beaucoup moins d'élèves du groupe expérimental soumettent une réponse erronée (« oui ») dans le forum électronique que sur papier. Une forme d'autocorrection a lieu avant la rédaction des messages en ligne. Une correction peut aussi provenir de l'explication tenace d'un autre élève comme celle présentée dans les cinq messages ci-dessous :

- Premier message : « Moi aussi je pense que c'est FAUX, car pas tous les nombres sont des nombres premiers. »
- Deuxième message : « Moi je pense que c'est faux, car pas tous les nombres sont des nombres premiers. »
- Troisième message : « Moi je pense que c'est faux, car pas tous les nombres sont premiers. ☺ »
- Quatrième message : « Faux, car sont pas tous premiers les nombres. »
- Cinquième message : « Moi je suis sûr que j'ai la bonne réponse, car pas tous les nombres sont premiers et preuve j'ai essayé le numéro 11 et ça ne marche pas. »

L'élève termine cette série de messages par un sixième et dernier message, dans lequel il précise sa pensée (figure 50, p. 162).

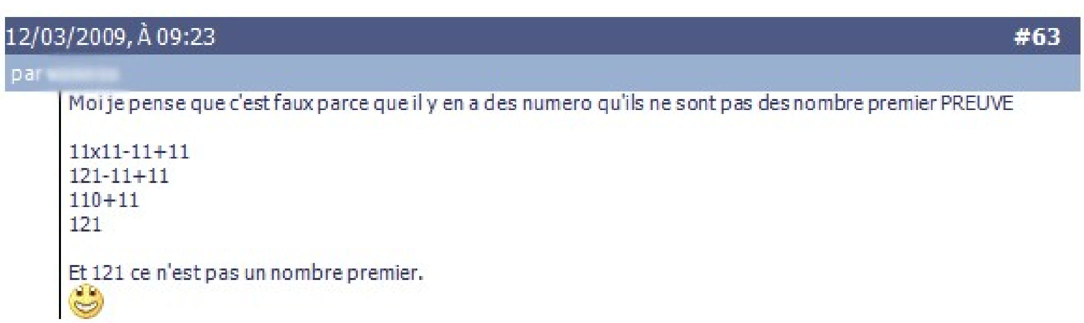


Figure 50. Dernier message d'une série de messages dans lequel l'élève précise son commentaire à la question Act2(f)-4a dans le forum électronique.

Les quatre premiers messages sont essentiellement les mêmes. Chacun de ces messages représente une réaction à des messages publiés par quatre élèves différents. Son cinquième message cherche à convaincre davantage en précisant la valeur à attribuer à n afin de trouver un nombre qui n'est pas premier. Finalement, le dernier message de cet élève ne correspond pas à un commentaire publié en réponse à un autre message. L'élève y présente non seulement en détail les calculs de son contre-exemple (où $n = 11$), mais il souligne aussi très clairement que ce contre-exemple est la preuve que tous les nombres obtenus ne sont pas premiers. En effet, « preuve » est écrit en majuscules, ce qui atteste l'importance que l'élève accorde à ce terme. Rappelons que l'une des fonctions de la preuve est de convaincre (Balacheff, 1987). Pour cet élève, il est intéressant de remarquer que le forum électronique semble fournir le levier pour la fonction sociale de la preuve. En effet, ce n'est qu'à la suite de la lecture des messages publiés par les élèves qui répondent incorrectement à la question que l'élève concerné sent le besoin d'élaborer sa solution.

Un autre échange observé dans le forum électronique permet de remarquer le pouvoir accordé au contre-exemple alors qu'un élève indique clairement que l'explication d'un collègue l'amène à changer d'idée. Au départ, cet élève présente un exemple où il remplace n par 2. Il obtient 13 et étant donné que ce nombre est premier, il affirme que la réponse obtenue est toujours un nombre premier. De toute évidence, il poursuit sa lecture des messages publiés dans le forum électronique, car quelques minutes plus tard, il publie un message où il explique avoir changé d'idée après avoir jeté un coup d'œil sur un contre-exemple présenté par un autre élève (voir la dernière ligne de la figure 51, p. 164). Une telle évolution dans la façon de voir les choses chez un élève n'est pas nécessairement visible sur papier, alors que normalement, seule la réponse finale est inscrite sur le document de travail. De plus, non seulement cette évolution est-elle visible pour le chercheur, mais elle l'est également pour l'élève qui peut consulter les différents messages et valider ou invalider sa production.

11/03/2009, À 10:29 #32

par

à écrit:

1x1-1+11=11
2x2-2+11=13
3x3-3+11=17
4x4-4+11=23
5x5-5+11=31
6x6-6+11=41
7x7-7+11=53
8x8-8+11=67
9x9-9+11=83
10x10-10+11=101

11x11-11+11= 121

121 n'est pas un nombre premier.
En tenant compte de ce qui précède, lorsqu'on remplace N par n'importe quel entier naturel dans l'expression n x n -n + 11, on n'obtient pas toujours un nombre premier.

Je trouve que m'a fait changer d'idée parce que 121 est divisible par 11 et lui même.

Figure 51. Contre-exemple qui conduit un élève à modifier sa réponse à la question Act2(f)-4a dans le forum électronique.

Parmi les trente messages qui présentent une réponse correcte à la question *Act2(f)-4a*, neuf contiennent un contre-exemple. Quelques observations peuvent être tirées du travail réalisé dans le forum électronique. Dans un premier temps, les preuves par expérience mentale (qui étaient toutes incorrectes sur papier) sont disparues au bénéfice du contre-exemple qui devient le type de preuve unique. Le travail est rarement incorrect[99], mais souvent imprécis, car dans la plupart des cas, les élèves mentionnent l'existence d'un contre-exemple sans pour autant donner plus de détails. Ce manque de précision en ligne ne reflète donc pas nécessairement un manque de compréhension chez les élèves du groupe expérimental.

Il y a une différence importante, sur papier et dans le forum électronique, en ce qui a trait au nombre de solutions qui présentent une réponse correcte et un contre-exemple. En effet, sur papier, 10 solutions sur 19 présentent une réponse correcte qui contient un contre-exemple, alors que dans le forum électronique, neuf messages sur 10 contiennent un contre-exemple. Trois de ces neuf messages ne contiennent aucune erreur alors que dans

[99] Le travail dans le forum électronique est moins souvent incorrect que le travail sur papier, mais la comparaison est plus ou moins fiable, car les effectifs sont réduits (19 élèves pour le travail sur papier et 10 pour le travail dans le forum électronique).

deux d'entre eux, les élèves proposent un « faux » contre-exemple (par exemple, une faute de calcul les mène à considérer un exemple comme un contre-exemple).

Neuf messages du groupe expérimental présentent une réponse affirmative d'un élève, soit que le nombre obtenu sera toujours un nombre premier (réponse incorrecte) et, parmi les messages contenant une preuve sur laquelle se base ce résultat, nous retrouvons quatre cas où l'empirisme naïf est utilisé correctement et un cas où un élève présente une expérience mentale incorrecte. Cette situation rappelle celle observée sur papier, à ceci près que le contre-exemple incorrect (à cause de la présence de l'algèbre) retrouvé sur papier a disparu dans le forum électronique.

4.3.2.4 Observations générales à la suite de l'analyse de la question Act2(Ind)-4

Il est possible de constater que pour le groupe contrôle et le groupe expérimental, l'empirisme naïf arrive au premier rang des types de preuves les plus utilisés par les élèves. Les solutions ne contiennent généralement aucune erreur, mais étant donné que les élèves ne respectent pas la règle du débat mathématique sur les exemples et s'appuient sur quelques exemples pour tirer leur conclusion (et que ces exemples ne contiennent aucun contre-exemple), cette dernière est erronée. L'expérience mentale se trouve au deuxième rang chez le groupe contrôle et au troisième rang chez le groupe expérimental. La prédisposition anticipée lors du prétest ne semble pas tenir. Notons que dans les deux groupes, ce type de preuves présente toujours un travail incorrect. Enfin, le contre-exemple se retrouve au troisième rang pour le groupe contrôle et au deuxième rang pour le groupe expérimental. Les élèves du groupe contrôle, en raison de la présence de l'algèbre dans leur solution, ne présentent jamais un travail correct, alors que les élèves du groupe expérimental réussissent habituellement à présenter une preuve qui ne contient aucune erreur.

Les résultats du forum électronique diffèrent un peu de ceux obtenus sur papier, principalement en ce qui a trait au nombre de messages qui présentent une réponse erronée. En effet, le pourcentage de messages est nettement moins élevé dans le forum (20 %) que sur papier (54 %). Cela est peut-être dû au fait que la lecture des messages publiés dans le forum électronique permet aux élèves d'invalider leur réponse. Ainsi, beaucoup plus de solutions présentent un contre-exemple en ligne (9 sur 10) que sur papier (11 sur 53), mais les élèves ne prennent pas nécessairement le temps de le développer (souvent, pour éviter de répéter ce qui a déjà été dit). Peu importe si le contre-exemple est développé ou non, les élèves qui l'utilisent respectent la règle du débat mathématique qui lui est associée.

4.3.3 Productions des élèves sur le développement de preuves pendant l'enseignement (Act2(Ind)-5)

La question *Act2(Ind)-5* invite les élèves à prendre position sur la question suivante : « Tous les nombres entiers divisibles par 10 sont divisibles par 5. Cette affirmation est-elle vraie ou fausse? ». Les différents types de preuves développés par les élèves du groupe contrôle et par les élèves du groupe expérimental sont présentés au tableau XXIV (p. 166).

Tableau XXIV. Fréquence et pourcentage de chaque type de preuves développé par les élèves de chacun des deux groupes à la question Act2(Ind)-5

	Groupe contrôle		Groupe expérimental	
	Fréquence	%	Fréquence	%
0. Aucune preuve	1	1	4	7
1. Empirisme naïf	31	45	16	28
2. Expérience cruciale	4	6	6	11
3. Exemple générique	0	0	1	2
4. Contre-exemple	0	0	2	3
5. Expérience mentale	32	47	25	44
7. Inclassable	1	1	3	5
Total	69	100	57	100

Comparativement à ce qui est observé à la question *Act2(Ind)-4*, où la preuve par empirisme naïf est celle qui se dégage le plus souvent des productions des élèves de chacun des deux groupes, c'est l'expérience mentale qui est la plus populaire dans ce cas-ci (47 % chez le groupe contrôle et 44 % chez le groupe expérimental). Les élèves qui optent pour ce type de preuves respectent la règle du débat qui touche l'utilisation de propriétés mathématiques pour prouver. Chez le groupe contrôle, presque le même pourcentage de solutions contiennent une preuve par empirisme naïf (45 %), alors que ce pourcentage n'est que de 28 % chez le groupe expérimental. Ainsi, les deux types de preuves qui sont de loin les plus utilisés par les élèves sont rattachés dans un cas aux preuves intellectuelles et dans l'autre cas aux preuves pragmatiques.

4.3.3.1 **Groupe contrôle**

Parmi les cinquante-six élèves du groupe contrôle ayant répondu à la question *Act2(Ind)-5*, 49 (87 %) y répondent correctement. Deux élèves répondent incorrectement et cinq omettent de fournir une réponse (tableau XXV, p. 167).

Tableau XXV. Fréquence et pourcentage des réponses des élèves du groupe contrôle à la question Act2(Ind)-5

	Fréquence	%
Pas précisé oui ou non	5	9
Vrai (réponse correcte)	49	87
Faux (réponse incorrecte)	2	4
Total	56	100

Parmi les 66 solutions soumises par les élèves du groupe contrôle qui répondent « vrai » (réponse correcte) à la question *Act2(Ind)-5*, 69 % présentent un travail qui ne contient aucune faute de calcul ou aucune erreur de raisonnement, tandis que 21 % sont partiellement correctes. Seules 8 % de ces solutions sont incorrectes (tableau XXVI, p. 167).

Tableau XXVI. Fréquence et pourcentage de chaque type de preuves présenté par les élèves du groupe contrôle ayant répondu « vrai » (réponse correcte) à la question Act2(Ind)-5 et qualité du travail

	Aucun travail		Travail correct		Travail partiellement correct		Travail incorrect		Total	
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
0. Aucune preuve	1	2	0	0	0	0	0	0	1	2
1. Empirisme naïf	0	0	24	36	4	6	1	2	29	44
2. Expérience cruciale	0	0	2	3	2	3	0	0	4	6
5. Expérience mentale	0	0	19	28	8	12	4	6	31	46
7. Inclassable	0	0	1	2	0	0	0	0	1	2
Total	1	2	46	69	14	21	5	8	66	100

Parmi ces 66 solutions, presque autant de productions d'élèves du groupe contrôle présentent une preuve par empirisme naïf (44 %) qu'une preuve par expérience mentale (46 %) et dans les deux cas, il est rare de retrouver un travail incorrect. Ainsi, bien que l'empirisme naïf demeure un type de preuves très utilisé par les élèves du groupe contrôle, il est possible de remarquer une polarisation vers l'utilisation de l'expérience mentale pour ce problème. Il y a alors lieu de se demander si le problème favorise le recours à ce type de preuves ou si les élèves ont développé une habileté avec celui-ci. Nous verrons que l'analyse des résultats du post-test semble donner raison à la première conjecture.

Dans la plupart des cas où les élèves présentent une preuve par expérience mentale, ils se basent sur le fait que 5 représente la moitié de 10. Ils expliquent alors que la réponse obtenue lorsqu'on divise un nombre par 5 est tout simplement le double de celle obtenue lorsqu'on divise ce même nombre par 10. Certains présentent aussi une expérience mentale comme preuve, mais leurs explications sont insuffisantes (12 %). Par exemple, ils affirment tout simplement « oui, car 5 va dans 10 ». Seuls deux élèves donnent une réponse incorrecte et ils arrivent à cette réponse en s'appuyant sur un contre-exemple issu d'un calcul inapproprié.

4.3.3.2 <u>Groupe expérimental (travail sur papier)</u>

La question *Act2(Ind)-5* a été répondue par quarante-six élèves du groupe expérimental (tableau XXVII, p. 168). Le pourcentage d'élèves du groupe expérimental ayant répondu correctement à la question *Act2(Ind)-5* (85 %) est à peu près le même que celui du groupe contrôle (87 %).

Tableau XXVII. Fréquence et pourcentage des réponses des élèves du groupe expérimental à la question Act2(Ind)-5

	Fréquence	%
Pas précisé oui ou non	1	2
Vrai (réponse correcte)	39	85
Faux (réponse incorrecte)	6	13
Total	46	100

Le type de preuves qui revient le plus souvent parmi les solutions présentées par les élèves du groupe expérimental qui répondent « vrai » (réponse correcte) à la question *Act2(Ind)-5* est l'expérience mentale (49 %) (tableau XXVIII, p. 169). Quinze des 25 solutions qui présentent ce type de preuves ne contiennent aucune erreur.

Tableau XXVIII. Fréquence et pourcentage de chaque type de preuves présenté par les élèves du groupe expérimental ayant répondu « vrai » (réponse correcte) à la question Act2(Ind)-5 et qualité du travail

	Aucun travail		Travail correct		Travail partiellement correct		Travail incorrect		Total	
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
0. Aucune preuve	3	6	0	0	0	0	0	0	3	6
1. Empirisme naïf	0	0	13	25	2	4	1	2	16	31
2. Expérience cruciale	0	0	6	12	0	0	0	0	6	12
3. Exemple générique	0	0	1	2	0	0	0	0	1	2
5. Expérience mentale	0	0	15	29	9	18	1	2	25	49
Total	3	6	35	68	11	22	2	4	51	100

La plupart de ces élèves précisent que 10 est divisible par 5 et ainsi, la réponse obtenue quand on divise un nombre par 5 va tout simplement être deux fois plus grande que celle obtenue quand on divise le même nombre par 10 (figure 52, p. 169). Notons qu'un seul élève a produit une expérience mentale incorrecte.

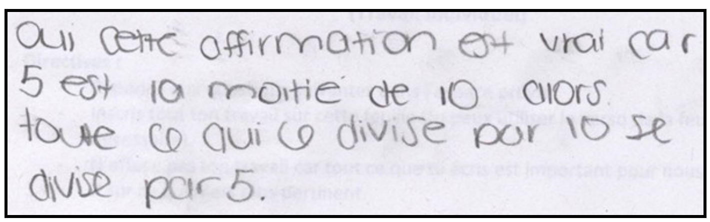

Oui cette affirmation est vrai car
5 est la moitié de 10 alors
toute ce qui ce divise par 10 se
divise par 5.

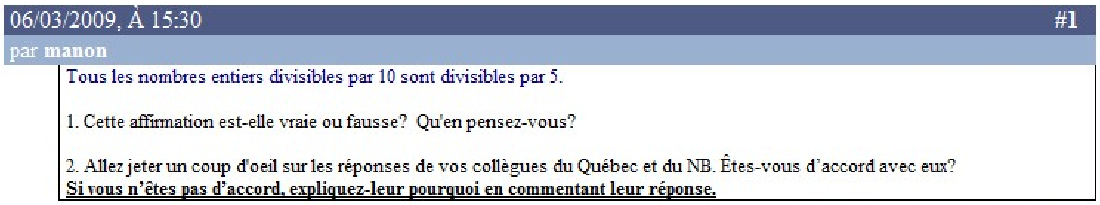
Figure 52. Expérience mentale à la question Act2(Ind)-5

Les autres productions d'élèves qui présentent une solution correcte proposent principalement une preuve par empirisme naïf (25 %) ou une expérience cruciale (12 %). Les élèves font donc quelques essais et tirent une conclusion à partir des résultats obtenus. La polarisation vers l'empirisme naïf, retrouvée chez le groupe contrôle, n'est pas observée ici. Finalement, six élèves du groupe expérimental répondent incorrectement à la question *Act2(Ind)*-5. Ils n'expliquent pas vraiment leur réponse ou s'appuient sur un faux contre-exemple pour tirer leur conclusion.

Encore une fois, lors de cette activité, les élèves du groupe expérimental échangent en ligne afin de partager leur solution avec leurs collègues et valider celle soumise par ces derniers. La prochaine section présente une analyse des échanges qui ont eu lieu en ligne.

4.3.3.3 <u>Groupe expérimental (travail dans le forum électronique)</u>

Afin de guider les élèves dans leurs échanges, le message présenté à la figure 53 (p. 170) est placé en ligne. Les élèves doivent d'abord préciser si l'affirmation « Tous les nombres entiers divisibles par 10 sont divisibles par 5 » est vraie ou fausse. Ils sont ensuite invités à commenter les messages de leurs collègues en précisant s'ils sont d'accord ou non avec les propos soumis par ces derniers.


06/03/2009, À 15:30 #1
par **manon**

Tous les nombres entiers divisibles par 10 sont divisibles par 5.

1. Cette affirmation est-elle vraie ou fausse? Qu'en pensez-vous?

2. Allez jeter un coup d'oeil sur les réponses de vos collègues du Québec et du NB. Êtes-vous d'accord avec eux?
Si vous n'êtes pas d'accord, expliquez-leur pourquoi en commentant leur réponse.

Figure 53. Deuxième message placé dans le forum lors de la deuxième activité (Act2(f)-5a et Act2(f)-5b)

Même si les deux questions publiées dans le forum électronique ne sont associées qu'à une discussion, elles sont étudiées séparément, car elles touchent le développement de preuves et l'évaluation de preuves. Cette section se concentre entièrement sur la première question qui a trait au développement de preuves. Les résultats qui découlent de l'analyse de la deuxième question font l'objet de la section *4.5.2.3 Groupe expérimental (travail dans le forum électronique)* (p. 223).

À la fin de l'expérimentation, ce message avait été lu 90 fois. Douze personnes, incluant un enseignant et la chercheuse[100], ont participé aux échanges. Les deux messages publiés par ces derniers ne sont pas comptabilisés dans les données. Au total, 21 messages ont été publiés par les élèves. Chaque message n'a qu'un objectif (par exemple, présenter une preuve, évaluer une preuve, etc.). La participation des élèves à la discussion concernant les questions *Act2(f)-5a* et *Act2(f)-5b* est moins marquée que celle observée aux questions *Act2(f)-4a* et *Act2(f)-4b*, puisque tel qu'il a été mentionné plus tôt, une seule classe a pu participer aux échanges pour cette activité. Les catégories touchées par chacun des messages écrits dans le forum électronique sont présentées au tableau XXIX (p. 171).

[100] Notre seule participation à l'ensemble des échanges qui ont lieu en ligne se fait lors de cette activité. L'un des élèves nous demande si nous allons publier la réponse à la question dans le forum électronique. Nous lui répondons que non, car nous voulons donner la chance aux élèves d'échanger. La réponse sera donnée plus tard en salle de classe.

Tableau XXIX. Fréquence des idées présentes dans les messages des élèves du groupe expérimental dans le forum électronique lors de la deuxième activité (Act2(f)-5a et Act2(f)-5b)

Présentation d'une preuve	5
Évaluation d'une preuve	14
Autres	2
Total	21

Quatorze des 21 messages visent l'évaluation d'une preuve et cinq messages présentent une preuve. Les deux catégories les plus touchées par les messages des élèves aux questions *Act2(F) – 5a* et *Act2(F) – 5b* sont donc les mêmes que celles observées lors des échanges en ligne concernant les questions *Act2(F) – 4a* et *Act2(F) – 4b*. Il importe de noter qu'à la question *Act2(F) – 5a*, aucun élève ne se contente de ne présenter que la réponse à la question (identifier si l'affirmation est vraie ou fausse). Dans tous les messages où les élèves répondent à cette question (21 au total), ils tentent également de justifier leur réponse. Le forum semble donc représenter un milieu riche pour la formulation et l'utilisation du langage mathématique, car il amène les élèves à expliciter leur pensée. Différents facteurs peuvent expliquer cela. Premièrement, il est possible que l'enseignant soit tout simplement intervenu au laboratoire informatique afin d'amener les élèves à expliquer leur raisonnement[101]. Dans un deuxième temps, il est également possible que les élèves aient réalisé que la majorité des messages contenaient plus qu'une simple réponse. Ils ont donc adapté leurs messages au type de messages publiés par leurs pairs.

Tous les élèves qui répondent à la première question (16 messages au total), c'est-à-dire qui identifient si l'affirmation qui leur est présentée est vraie ou fausse, le font correctement. Les sept autres messages ne visent pas nécessairement répondre à cette question. Les résultats obtenus dans le forum électronique correspondent à ceux obtenus sur papier dans le sens où, dans les deux environnements, la majorité des élèves identifient correctement que l'affirmation est vraie. Étant donné que la plupart des élèves répondent correctement à la question sur papier, il n'est pas surprenant de voir des résultats similaires en ligne.

À travers cinq messages, les élèves du groupe expérimental tentent de justifier leur réponse en présentant une preuve dans le forum électronique. Dans tous ces messages, les

[101] Aucune information n'a été recueillie à cet effet.

élèves précisent bel et bien que l'affirmation est vraie (réponse correcte). Trois messages présentent des solutions dans lesquelles les élèves ont recours à l'empirisme naïf pour justifier leur réponse alors que dans deux autres messages, les élèves se penchent plutôt vers l'expérience mentale. Deux des trois messages qui présentent une preuve par empirisme naïf ne contiennent aucune erreur (le troisième renferme une faute de calcul). Un exemple de travail sans erreur est présenté à la figure 54 (p. 172). Malgré le fait que les exemples présentés soient corrects, il demeure que ces élèves enfreignent la règle du débat mathématique qui précise qu'une conclusion ne peut être tirée à partir de quelques exemples qui fonctionnent.

Figure 54. Empirisme naïf à la question Act2(f)-5a dans le forum électronique

Dans deux autres messages, les élèves expliquent leur raisonnement à travers une expérience mentale. Ces derniers précisent que le résultat obtenu lorsqu'on divise un nombre par 5 est le double de celui obtenu lorsqu'on divise ce même nombre par 10. Leur preuve est donc davantage considérée comme une preuve intellectuelle que comme une preuve pragmatique. L'un des élèves qui proposent des exemples concrets dans sa solution (empirisme naïf) tente d'expliquer ses résultats en précisant que la réponse obtenue lorsqu'un nombre est divisé par 5 représente tout simplement le double de la réponse obtenue lorsque ce même nombre est divisé par 10 (figure 55, p. 173). Ce raisonnement représente une forme d'expérience mentale. Cet élève part d'une preuve pragmatique et tend vers une forme de preuve intellectuelle (même si cette dernière est présentée de façon assez élémentaire).

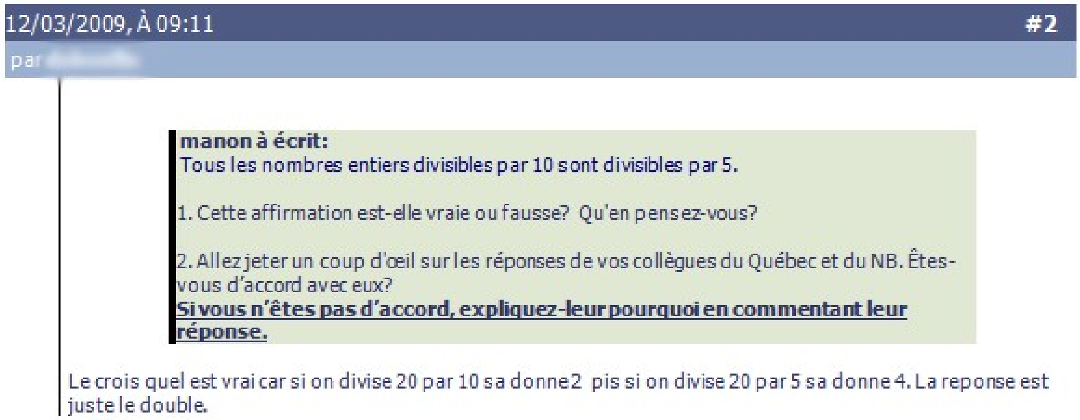


Figure 55. Expérience mentale à la question Act2(f)-5a dans le forum électronique

Vu que seulement cinq messages présentent une preuve dans l'outil de communication en ligne, il est difficile de faire des liens entre ces preuves et celles retrouvées sur papier. Notons toutefois que dans le forum électronique, seuls deux types de preuves se dégagent des productions des élèves (empirisme naïf et expérience mentale), alors que sur papier, quatre types de preuves sont représentés (empirisme naïf, expérience cruciale, exemple générique et expérience mentale).

4.3.3.4 <u>Observations générales à la suite de l'analyse de la question Act2(Ind)-5</u>

Rappelons que lors du travail sur papier, 49 des 56 élèves (87 %) du groupe contrôle et 39 des 46 élèves (85 %) du groupe expérimental confirment, à juste titre, que tous les nombres entiers divisibles par 10 sont divisibles par 5. Ce taux passe à 16/16 dans le forum électronique. Évidemment, dès qu'une solution correcte est publiée, tous les élèves y ont accès. Il y a donc lieu de se demander si la bonne réponse fournie dans ces messages a été publiée par les élèves avant ou après qu'ils aient vu une solution correcte présentée par un de leurs collègues.

Les deux types de preuves qui sont de loin les plus utilisés par les élèves en réponse à cette question sont rattachés dans un cas aux preuves intellectuelles (expérience mentale) et dans l'autre cas aux preuves pragmatiques (empirisme naïf). Globalement (peu importe la réponse donnée à la question), les élèves de chacun des deux groupes préfèrent les preuves par expérience mentale. Cette préférence pour l'expérience mentale est toutefois plus marquée chez les élèves du groupe expérimental. En effet, pour ce groupe, 44 % des solutions présentent une expérience mentale alors que 28 % mettent plutôt de l'avant une preuve par empirisme naïf. Pour le groupe contrôle, le pourcentage de productions dans lesquelles les élèves proposent une expérience mentale (47 %) est pratiquement le même que le pourcentage de productions qui présentent une preuve par empirisme naïf (45 %). De plus, dans le groupe expérimental, la preuve intellectuelle (expérience mentale) est mieux réussie que la preuve pragmatique, ce qui n'est pas le cas pour le groupe contrôle. Les types de preuves présentés en ligne par les élèves du groupe expérimental diffèrent légèrement de ceux présentés sur papier dans le sens où les preuves par empirisme naïf occupent une place plus importante en ligne. Toutefois, l'effectif est trop petit pour pouvoir faire une comparaison fiable.

Le passage des preuves pragmatiques (plus particulièrement les preuves par empirisme naïf) aux preuves intellectuelles (dans ce cas-ci, l'expérience mentale) se fait donc dans les deux groupes pendant la deuxième activité, soit entre la première partie (*Act2(Ind)-4a* et *Act2(Ind)-4b*) et la deuxième partie (*Act2(Ind)-5a* et *Act2(Ind)-5b*). Nous verrons lors de l'analyse des productions d'élèves au post-test si cette tendance se maintient.

4.3.4 Productions des élèves sur le développement de preuves au post-test (Post(Ind)-10)

La dernière question du post-test (*Post(Ind)-10*) vise le développement de preuves. Elle amène d'abord les élèves à indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : *Si a est un nombre naturel impair, alors* a^2 *est également un nombre impair*. Ils doivent ensuite justifier leur réponse. Les types de preuves développés par les élèves de chacun des deux groupes sont présentés dans le tableau XXX (p. 174).

Tableau XXX. Fréquence et pourcentage de chaque type de preuves développé par les élèves de chacun des deux groupes à la question Post(Ind)-10

	Groupe contrôle		Groupe expérimental	
	Fréquence	%	Fréquence	%
0. Aucune preuve	2	4	5	12
1. Empirisme naïf	27	55	7	16
2. Expérience cruciale	3	6	1	2
3. Exemple générique	0	0	2	5
4. Contre-exemple	8	17	6	14
5. Expérience mentale	6	12	18	42
7. Inclassable	3	6	4	9
Total	51	100	43	100

Un regard sur les types de preuves développés par les élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental permet de remarquer que les élèves du groupe contrôle présentent principalement des preuves associées à l'empirisme naïf (55 % chez le groupe contrôle comparativement à 16 % chez le groupe expérimental) tandis que le raisonnement des élèves du groupe expérimental est avant tout lié à des expériences mentales (42 % chez le groupe expérimental et 12 % chez le groupe contrôle). Ainsi, à la fin de l'expérimentation, le travail des élèves du groupe contrôle se situe davantage au niveau pragmatique alors que celui des élèves du groupe expérimental s'inscrit plus au niveau intellectuel. Voyons plus en détail le travail réalisé par chacun des groupes à cette question.

4.3.4.1 Groupe contrôle

Cinquante-neuf élèves du groupe contrôle ont répondu à la question *Post(Ind)-10*. Les différentes réponses soumises par ces élèves sont présentées au tableau XXXI (p. 175).

Tableau XXXI. Fréquence et pourcentage des réponses des élèves du groupe contrôle à la question Post(Ind)-10

	Fréquence	%
Pas précisé vrai ou faux	11	18
Vrai (réponse correcte)	39	66
Faux (réponse incorrecte)	8	14
Vrai et faux	1	2
Total	59	100

Parmi les 59 élèves de ce groupe qui ont répondu au post-test, 39 (66 %) répondent correctement et huit élèves (14 %) répondent incorrectement à la question et infirment l'énoncé. Un autre élève présente cinq exemples, mais dans deux de ces exemples, il effectue une addition plutôt qu'une multiplication, ce qui l'amène à conclure que l'affirmation est vraie dans certains cas et fausse dans d'autres. Il est intéressant de remarquer que la présence de deux contre-exemples ne suffit pas à l'élève pour infirmer l'affirmation. Ainsi, cet élève ne respecte pas la règle du débat mathématique en lien avec le contre-exemple.

Parmi les 40 preuves développées par les élèves qui répondent correctement à la question *Post(Ind) – 10*, la majorité, soit 29, sont des preuves par empirisme naïf et aucune ne contient d'erreur (tableau XXXII, p. 176).

Tableau XXXII. Fréquence de chaque type de preuves présenté par les élèves du groupe contrôle ayant répondu « vrai » (réponse correcte) à la question Post(Ind)-10 et qualité du travail

	Aucun travail	Travail correct	Manque de précision	Travail partiellement correct	Travail incorrect	Total
0. Aucune preuve	2	0	0	0	0	2
1. Empirisme naïf	0	29	0	0	0	29
2. Expérience cruciale	0	2	0	1	0	3
5. Expérience mentale	0	0	2	0	1	3
7. Inclassable	1	0	0	2	0	3
Total	3	31	2	3	1	40

Les deux autres preuves qui ressortent sont l'expérience cruciale (trois cas, dont aucun n'est incorrect) et l'expérience mentale (trois cas, dont un est incorrect). La figure 56 (p. 176) présente un exemple d'expérience mentale dans lequel l'élève cherche à justifier sa réponse en expliquant que, peu importe l'exposant utilisé, la solution est toujours impaire. Dans son explication, il ne précise toutefois pas pourquoi le nombre obtenu est toujours impair.

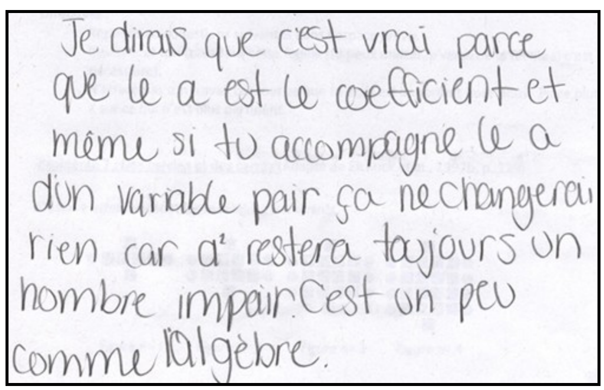

Je dirais que c'est vrai parce
que le a est le coefficient et
même si tu accompagne le a
d'un variable pair ça ne changerai
rien car a' restera toujours un
nombre impair. C'est un peu
comme l'algèbre.

Figure 56. Expérience mentale à la question Post(Ind)-10

Les productions des élèves qui ont répondu que l'énoncé est vrai montrent que l'empirisme naïf est encore favori et le travail présenté en lien avec ce type de preuve est toujours correct. Les élèves ont donc encore tendance à ne pas respecter la règle du débat mathématique des exemples. L'expérience mentale est peu utilisée, donc le recours à ce type de preuve observé lors de la deuxième activité (plus précisément en lien avec le problème sur les nombres entiers divisibles par 10 et par 5) n'était que passager. Finalement, le recours à l'expérience cruciale est assez stable du prétest au post-test.

Parmi les 11 preuves présentées par les élèves du groupe contrôle qui répondent « faux » ou « vrai et faux » (réponse incorrecte) à la question *Post(Ind)-10*, huit présentent un faux contre-exemple. Les trois autres relèvent de l'expérience mentale et les arguments soulevés ne sont pas pertinents (tableau XXXIII, p. 177).

Tableau XXXIII. Fréquence de chaque type de preuves présenté par les élèves du groupe contrôle ayant répondu « faux » ou « vrai et faux » (réponse incorrecte) à la question Post(Ind)-10 et qualité du travail

	Travail incorrect	Travail partiellement correct	Total
4. Contre-exemple	7	1	8
5. Expérience mentale	3	0	3
Total	10	1	11

4.3.4.2 <u>Groupe expérimental</u>

Cinquante-sept élèves du groupe expérimental ont répondu à la dernière question du post-test (*Post(Ind)-10*). Vingt-sept d'entre eux (51 %) confirment l'énoncé, alors que 13 (24 %) l'infirme. Douze élèves (23 %) omettent de préciser si l'affirmation qui leur est présentée est vraie ou fausse tandis qu'un élève soutient qu'elle est à la fois vraie et fausse (tableau XXXIV, p. 177).

Tableau XXXIV. Fréquence et pourcentage des réponses des élèves du groupe expérimental à la question Post(Ind)-10

	Fréquence	%
Pas précisé vrai ou faux	12	23
Vrai (réponse correcte)	27	51
Faux (réponse incorrecte)	13	24
Vrai et faux	1	2
Total	53	100

Proportionnellement parlant, plus d'élèves du groupe contrôle identifient correctement la justesse mathématique de cette affirmation (66 % des élèves du groupe contrôle confirment que l'affirmation est vraie alors que chez le groupe expérimental, ce pourcentage est de 51 %). Contrairement à ce qui est observé chez les élèves du groupe contrôle, qui utilisent majoritairement l'empirisme naïf pour justifier que l'énoncé est vrai, les élèves du groupe expérimental développent des preuves plus intellectuelles pouvant être associées à l'expérience mentale (13 solutions sur 19 proposent ce type de preuves) (tableau XXXV, p. 278).

Tableau XXXV. Fréquence de chaque type de preuves présenté par les élèves du groupe expérimental ayant répondu « vrai » (réponse correcte) à la question Post(Ind)-10 et qualité du travail

	Aucun travail	Travail correct	Manque de précision	Travail partiellement correct	Travail incorrect	Total
0. Aucune preuve	5	0	0	0	0	5
1. Empirisme naïf	0	5	0	1	0	6
2. Expérience cruciale	0	0	0	1	0	1
3. Exemple générique	0	1	0	0	0	1
5. Expérience mentale	0	0	10	0	3	13
7. Inclassable	3	0	0	0	0	3
Total	8	6	10	2	3	29

Parmi ces 13 preuves par expérience mentale, trois présentent un travail incorrect alors que les 10 autres manquent de précision. Dans la plupart de ces cas, les élèves se limitent à reformuler l'énoncé, sans pour autant appuyer ce qu'ils disent sur des propriétés mathématiques. Ce qu'ils avancent est vrai, mais ils n'apportent pas d'arguments mathématiques supplémentaires pour justifier leur réponse. Les preuves observées dans les productions des élèves du groupe expérimental sont donc plus avancées dans la typologie de Balacheff (1987) que celles observées chez le groupe contrôle. Elles sont cependant moins bien réussies que les preuves par empirisme naïf, qui sont utilisées six fois et jamais de façon incorrecte.

Finalement, contrairement à ce qui a pu être observé chez le groupe contrôle, où aucun élève n'a recours à un exemple générique, un élève du groupe expérimental présente un tel exemple qui lui permet de tirer la bonne conclusion (figure 57, p. 179). L'élève représente le carré d'un nombre par un dessin où les côtés sont formés d'un certain nombre de cercles (le nombre de cercles étant égal à a). À partir de quelques dessins, l'élève explique son raisonnement à travers une expérience mentale.

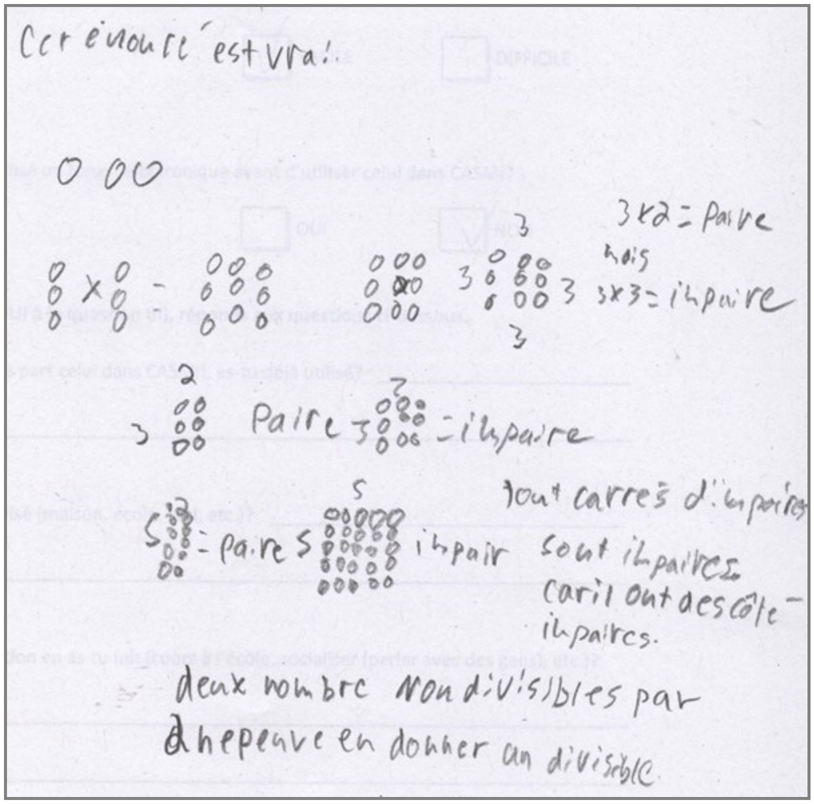


Figure 57. Exemple générique suivi d’une expérience mentale à la question Post(Ind)-10

À l’instar des élèves du groupe contrôle, plusieurs élèves du groupe expérimental qui répondent « faux » ou « vrai et faux » à la question *Post(Ind)-10* optent pour une preuve empirique, mais présentent des exemples erronés, ce qui les conduit à produire un faux contre-exemple six fois sur 14 (tableau XXXVI, p. 279).

Tableau XXXVI. Fréquence de chaque type de preuves présenté par les élèves du groupe expérimental ayant répondu « faux » ou « vrai et faux » (réponse incorrecte) à la question Post(Ind)-10 et qualité du travail

	Travail correct	Travail partiellement correct	Travail incorrect	Total
1. Empirisme naïf	1	0	0	1
2. Exemple générique	0	0	1	1
4. Contre-exemple	0	0	6	6
5. Expérience mentale	0	0	5	5
7. Inclassable	0	1	0	1
Total	1	1	12	14

Dans cinq cas, les élèves proposent une expérience mentale, mais leurs solutions sont toutes incorrectes. Tant pour le faux contre-exemple que pour l’expérience mentale, le fait que l'exposant soit un nombre pair semble influencer ces élèves. Par exemple, ils précisent que la réponse obtenue n'est pas impaire, car 2 est un nombre pair, ou encore ils multiplient *a* par 2 plutôt que de le multiplier par lui-même.

4.3.4.3 Observations générales à la suite de l'analyse de la question Post(Ind)-10

Les résultats obtenus à la question *Post(Ind)-10* permettent de remarquer que les preuves par empirisme naïf sont préférées par les élèves du groupe contrôle alors que les preuves par expérience mentale sont les plus populaires chez les élèves du groupe expérimental. Ainsi, lors du post-test, les élèves du groupe contrôle reviennent aux preuves empiriques (ils avaient davantage présenté des preuves par expériences mentales lors de la question *Act2(Ind)-5*) tandis que les élèves du groupe expérimental, qui avaient surtout développé des preuves par expérience mentale à la question *Act2(Ind)-5*, présentent encore ce type de preuve au post-test. Cependant, alors que la majorité des preuves par empirisme naïf du groupe contrôle sont correctes, aucun élève du groupe expérimental ne réussit à présenter une preuve par expérience mentale complète. Il est donc possible d'observer une préférence pour les preuves intellectuelles chez les élèves du groupe expérimental (comparativement aux élèves du groupe contrôle), malgré le fait qu'ils éprouvent plus de difficulté avec ces dernières qu'avec les preuves par empirisme naïf.

4.3.5 Conclusion sur la 1re question de recherche : habiletés de validation algébrique – Développement de preuves

Rappelons que la première question de recherche porte sur les habiletés de validation algébrique dont les élèves font preuve. Quatre questions visant le développement de preuves ont été présentées aux élèves : *Pré(Ind)-3*, *Act2(Ind)-4*, *Act2(Ind)-5* et *Post(Ind)-10*.

Pour trois des quatre questions énumérées ci-dessus (*Pré(Ind)-3*, *Act2(Ind)-5* et *Post(Ind)-10*), le pourcentage d'élèves du groupe contrôle qui réussissent à répondre correctement est plus élevé que le pourcentage d'élèves du groupe expérimental. La différence la plus importante est observée dans le prétest (*Pré(Ind)-3*), alors que 73 % des élèves du groupe contrôle et 42 % des élèves du groupe expérimental affirment, à juste titre, que la somme de deux nombres impairs consécutifs est toujours multiple de 4. Pour les deux autres questions, l'écart est moins important.

Globalement, les élèves du groupe contrôle préfèrent l'empirisme naïf tandis que chez le groupe expérimental, il est possible d'observer un passage de l'empirisme naïf (preuve pragmatique) à l'expérience mentale (preuve intellectuelle). Lors du prétest et à la question *Act2(Ind)-4* (expression $n \times n - n + 11$), il est possible d'observer que les élèves du groupe contrôle développent davantage des preuves par empirisme naïf que les élèves du groupe expérimental. Une divergence entre les deux groupes peut aussi être observée à la question *Act(Ind)-5* (nombres entiers divisibles par 10 et par 5). Chez le groupe contrôle, presque la moitié des solutions prennent la force d'une expérience mentale (47 %) ou de l'empirisme naïf (45 %), deux types de preuves qui se trouvent aux extrémités de la typologie de preuves de Balacheff (1987). Chez le groupe expérimental, l'expérience mentale occupe le premier rang avec 44 % et l'empirisme naïf se trouve au deuxième rang, mais le pourcentage associé à ce type de preuves n'est que de 28 %. La preuve qui se trouve au deuxième rang est donc moins polarisée chez le groupe expérimental. Lors du post-test, il est possible d'observer un retour à l'empirisme naïf par les élèves du groupe contrôle et un maintien de l'expérience mentale chez le groupe expérimental. Étant donné qu'il est plus simple de présenter une preuve par empirisme naïf, dans laquelle sont présentés quelques cas, qu'une preuve par expérience mentale, où le raisonnement déductif est sollicité et où l'idée de généralité entre en jeu, il est raisonnable de penser que les élèves qui développent des preuves par empirisme naïf connaissent plus de succès que les élèves qui présentent une expérience mentale. En réalité, cela reflète exactement la situation vécue par les élèves du groupe expérimental. Leurs preuves par expérience mentale sont, dans la plupart des cas, moins bien réussies que leurs preuves par empirisme naïf. Par conséquent, en grande partie, les élèves du groupe contrôle ne respectent pas la règle du débat mathématique des exemples, car ils démontrent un penchant pour les preuves par empirisme naïf. Pour leur part, les solutions des élèves du groupe expérimental, prises globalement, reflètent une tendance à utiliser adéquatement la règle des propriétés mathématiques.

4.4 2^e^ question de recherche : habiletés en lien avec l'évaluation de preuves – Classement de preuves

La réalisation des activités par l'ensemble des élèves nous permet d'évaluer différents éléments liés aux situations de validation. Plus précisément, c'est grâce à l'analyse des productions d'élèves réalisées en salle classe ou dans le forum électronique lors des activités où ils ont à classer différents types de preuves de la plus convaincante à la moins convaincante et à justifier leurs choix que nous sommes à même de répondre à notre deuxième question de recherche, soit :

1. Quelle est l'influence de l'utilisation d'un forum électronique, lors de la réalisation d'activités en algèbre, sur le développement d'habiletés en lien avec l'évaluation de preuves ou de solutions chez des élèves qui en sont à leur 8^{e} année de scolarité[102]?
    i. Quelles sont les règles du débat mathématique mobilisées par les élèves, en salle de classe (papier-crayon) ou dans un forum électronique, pour valider ou invalider une preuve ou une solution développée pour répondre à un problème algébrique?

Dans le cadre de notre expérimentation, à différentes reprises, les élèves ont à classer des preuves de la plus convaincante à la moins convaincante[103] : *Pré(Ind)-2a* et *Pré(Ind)-2b*, *Act1(Ind)-2*, *Act1(Eq)-2c* ainsi que *Post(Ind)-9a* et *Post(Ind)-9b*. Ils doivent ensuite justifier ce classement. Dans tous les cas, les solutions présentées aux élèves sont fictives et variées et chaque type de preuves de la typologie de Balacheff (1987) est représenté.

Lors d'une telle activité, certaines preuves peuvent être validées alors que d'autres peuvent être invalidées. Les explications des élèves en ce qui a trait à cette (in)validation sont particulièrement pertinentes, car elles nous permettent non seulement d'avoir des informations sur les éléments qui poussent les élèves à considérer une preuve comme étant plus convaincante qu'une autre, mais également sur les règles du débat mathématique mobilisées ou non par les élèves lorsqu'ils ont à évaluer des preuves.

Lors de l'élaboration de notre grille d'analyse, nous nous sommes inspirée des travaux de Mary (1999). Les arguments d'autorité, dont l'auteure tient compte, sont considérés comme faisant partie de l'argumentation. À cette catégorie s'ajoute également les commentaires qui touchent la clarté d'une solution, sa complexité, etc. Bien qu'il ne soit pas pertinent de considérer la validation à travers l'argumentation comme une règle du débat mathématique (une telle habitude ne doit pas être développée chez les élèves, il est

---

[102] Dans cette section, nous ne traitons que les problèmes qui touchent l'évaluation de preuves. L'évaluation de solutions sera abordée dans la section *4.6 Habiletés en lien avec les problèmes de recherche de régularités* (p. 239).

[103] Notons que les questions *Pré(Ind)-2a*, *Pré(Ind)-2b*, *Act1(Ind)-2* et *Act1(Eq)-2c* touchent le classement des mêmes preuves.

plutôt préférable de les amener à valider en utilisant des arguments mathématiques), nous ne pouvons l'ignorer lors de l'étude des raisons qui poussent les élèves à accepter ou non une solution quelconque. L'analyse des productions d'élèves nous permet de réaliser que l'utilisation de l'argumentation est fréquente dans le cas de l'évaluation de preuves, ce qui n'était pas le cas lors de la production de preuves.

Les sections qui suivent présentent les preuves considérées comme les plus convaincantes ainsi que les preuves jugées comme les moins convaincantes par les élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental. Les éléments soulevés lorsqu'ils justifient leur classement font également partie de notre analyse. Toutes les questions énumérées ont été analysées, car elles permettent la mise en œuvre des habiletés liées à l'évaluation de preuves. Cependant, nous nous contentons de présenter les résultats qui nourrissent réellement notre analyse, soit ceux en lien avec les questions suivantes : *Pré(Ind)-2a* et *Pré(Ind)-2b*, *Act1(Eq)-2c* et *Post(Ind)-9a* et *Post(Ind)-9b*.

Afin d'être en mesure d'attribuer un rang à chacune des preuves classées, il est pertinent de calculer un rang moyen qui prend en considération l'ensemble des classements suggérés par les élèves[104]. La figure 58 (p. 184) met de l'avant les types de preuves qui arrivent au premier rang lors du calcul du rang moyen pour les questions *Pré(Ind)-2a, Act1(Eq)-2c et Post(Ind)-9a*. Le tableau XXXVII (p. 184) présente les rangs moyens auxquels les élèves des groupes contrôle et expérimental classent les preuves aux questions *Pré(Ind)-2a*, *Act1(Eq)-2c*, et *Post(Ind)-9a*.

[104] Le rang moyen pour une solution quelconque est calculé comme une moyenne pondérée, soit de la façon suivante : [(nb de 1er rang × 1) + (nb de 2^{e} rang × 2) + (nb de 3^{e} rang × 3) + (nb de 4^{e} rang × 4) + (nb de 5^{e} rang × 5)] ÷ nb total d'élèves qui ont classé les preuves

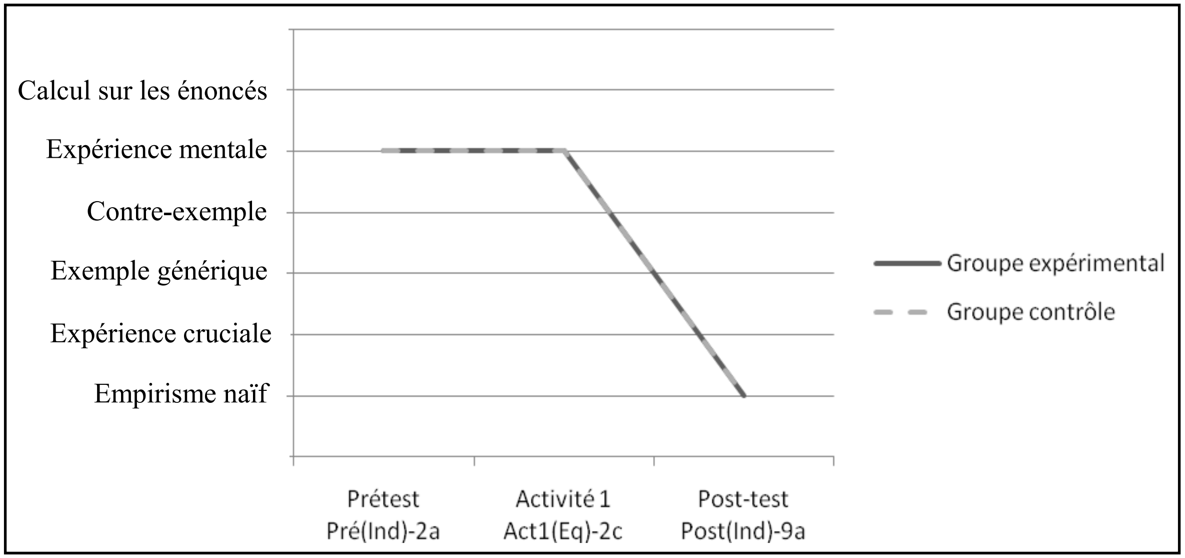


Figure 58. Évolution des types de preuves qui arrivent au premier rang lors du calcul du rang moyen pour les deux groupes aux questions Pré(Ind)-2a, Act1(Eq)-2c et Post(Ind)-9a

Tableau XXXVII. Rang moyen auquel les élèves de chacun des deux groupes classent les preuves aux questions Pré(Ind)-2a, Act1(Eq)-2c et Post(Ind)-9a

	Groupe contrôle			Groupe expérimental		
	Pré(Ind)-2a	Act1(Eq)-2c	Post(Ind)-9a	Pré(Ind)-2a	Act1(Eq)-2c	Post(Ind)-9a
1. Empirisme naïf	3,1	3,9	1,6	3,3	3,1	2,5
2. Expérience cruciale	2,9	3,2	2,7	3,1	2,8	3,4
3. Exemple générique	3,7	3,7	4,0	3,8	3,9	3,3
5. Expérience mentale	2,2	1,7	3,6	2,2	2,0	2,9
6. Calcul sur les énoncés	3,0	2,5	3,2	2,6	3,2	2,9

Dans ce cas-ci, les deux groupes présentent les mêmes résultats : l'expérience mentale est préférée au prétest et à l'activité 1, alors que l'empirisme naïf occupe le premier rang (en fonction des rangs moyens) au post-test. L'exemple générique, de son côté, se trouve toujours au quatrième ou au cinquième rang. Étant donné que les productions associées à ce type de preuves ne contiennent pas d'explication, les élèves ne reconnaissent pas le caractère de généralité qui lui est associée.

4.4.1 Classement de preuves (Pré(Ind)-2a) et justifications des élèves (Pré(Ind)-2b) au prétest

À la question *Pré(Ind)-2a*, les élèves doivent classer cinq preuves[105] d'élèves fictifs qui valident l'énoncé suivant : *Quand on additionne deux nombres pairs (peu importe lesquels), la réponse est toujours paire*. Chaque preuve représente l'un des cinq types de preuves de la typologie de Balacheff (1987). Le pourcentage d'élèves ayant accordé l'un des rangs à chacune de ces preuves est présenté dans le tableau XCVI (annexe 25, p. 389).

Les choix des élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental sont sensiblement les mêmes, plus particulièrement en ce qui a trait aux solutions qui se trouvent aux extrémités du classement. Ils considèrent l'une des preuves intellectuelles, soit la preuve par expérience mentale, comme étant la plus convaincante. En effet, au moins 36 % des élèves de chacun des groupes lui attribuent le premier rang alors que plus du quart des élèves de chacun des groupes placent cette solution au deuxième rang. C'est l'exemple générique (solution 5) qui semble la moins convaincante pour les élèves des deux groupes. Au total, 44 % des élèves du groupe contrôle et 36 % des élèves du groupe expérimental accordent le cinquième et dernier rang à ce type de preuves.

Pour le groupe contrôle, les preuves placées aux premier et cinquième rangs se démarquent des autres preuves dans le sens où elles obtiennent un pourcentage beaucoup plus élevé (le double ou plus). La situation diffère pour le groupe expérimental, alors que les pourcentages entre les différentes preuves sont plus rapprochés. Les élèves du groupe contrôle semblent donc plus unanimes que les élèves du groupe expérimental en ce qui a trait, à la fois, à la preuve la plus convaincante et à la preuve la moins convaincante. Pour les deuxième, troisième et quatrième rangs, les choix des élèves des deux groupes sont plus dispersés.

[105] Voir p. 87 pour un rappel des cinq preuves présentées aux élèves.

À la lumière de ce qui précède, il est assez facile de déterminer la preuve qui semble la plus convaincante aux yeux des élèves ainsi que celle qui les convainc le moins. Or, la tâche n'est pas si simple pour les trois autres rangs, alors qu'aucune preuve ne se démarque réellement des autres. L'analyse des rangs moyens semble donc nécessaire pour mieux comprendre le classement des élèves (tableau XXXVIII, p. 186).

Tableau XXXVIII. Rang moyen auquel les élèves de chacun des deux groupes classent les solutions à la question Pré(Ind)-2a

	Groupe contrôle	Groupe expérimental
1. Empirisme naïf (s4) [106]	3,1	3,3
2. Expérience cruciale (s2)	2,9	3,1
3. Exemple générique (s5)	3,7	3,8
5. Expérience mentale (s3)	2,2	2,2
6. Calcul sur les énoncés (s1)	3,0	2,6

La preuve liée à l'empirisme naïf, la moins convaincante selon la typologie de Balacheff (1987), arrive au quatrième rang. Cela est surprenant, compte tenu des résultats de Healy et Hoyles (2000) selon lesquels les élèves considèrent les données empiriques comme étant convaincantes. Néanmoins, il est possible que la disposition de la solution influence les élèves, et ce, malgré les clarifications amenées par les enseignants. Certains peuvent rejeter cette solution à cause de sa présentation et non à cause de son contenu.

4.4.1.1 <u>Groupe contrôle</u>

Le rang moyen, parce qu'il prend en compte l'ensemble des classements soumis par les élèves, permet d'avoir une vision globale des choix des élèves lorsqu'ils classent différentes preuves. Ceux calculés à partir des classements des élèves du groupe contrôle à la question *Pré(Ind)-2a* sont présentés au tableau XXXIX (p. 187).

[106] Le code entre parenthèses représente le numéro associé à chaque solution lorsqu'elles sont présentées aux élèves. Ainsi, (s1) signifie « solution 1 », (s2) signifie « solution 2 », ainsi de suite.

Tableau XXXIX. Rang moyen auquel les élèves du groupe contrôle classent les solutions à la question Pré(Ind)-2a

	Rang moyen
5. Expérience mentale (s3)	2,2
2. Expérience cruciale (s2)	2,9
6. Calcul sur les énoncés (s1)	3,0
1. Empirisme naïf (s4)	3,1
3. Exemple générique (s5)	3,7

Selon les rangs moyens, c'est l'expérience mentale (solution 3), soit la preuve qui explique, qui occupe le premier rang et qui, par le fait même, est la plus convaincante aux yeux des élèves du groupe contrôle. L'exemple générique (solution 5) se retrouve au dernier rang. Aucun élève ne semble donc reconnaitre le caractère de généralité présent dans cette solution et que plusieurs élèves la considèrent comme une solution empirique, où un seul exemple est présenté. Cette non-reconnaissance du caractère de généralité peut expliquer la faible popularité de cette solution. Il est intéressant de remarquer que les rangs moyens obtenus pour ces deux solutions (solution 3 et solution 5) sont assez éloignés des autres rangs moyens. Les élèves paraissent donc s'entendre sur les deux preuves qui se trouvent aux extrémités de leur classement, soit au premier et au dernier rang.

La situation est différente pour les trois autres preuves. Effectivement, les rangs moyens des preuves qui occupent le deuxième rang (expérience cruciale), le troisième rang (calcul sur les énoncés) et le quatrième rang (empirisme naïf) sont très rapprochés (2,9; 3,0 et 3,1 respectivement). Les élèves semblent donc moins unanimes en ce qui a trait au rang que devraient occuper ces trois preuves. Il est aussi possible de remarquer que le passage d'un rang à un autre (par exemple, le passage du premier au deuxième rang ou du troisième au quatrième rang) est marqué par le passage d'une preuve intellectuelle à une preuve pragmatique (ou vice-versa). Par conséquent, le classement global obtenu à partir du calcul des rangs moyens ne reflète pas une préférence pour un niveau de preuves plutôt qu'un autre (preuves intellectuelles versus preuves pragmatiques) chez les élèves du groupe contrôle. Il y a toutefois lieu de se demander jusqu'à quel point la disposition de la preuve par empirisme naïf (solution 4), qui était problématique dans le prétest, a pu influencer le choix des élèves. Il est probable que certains élèves aient rejeté cette solution en pensant qu'elle présentait des calculs incorrects.

Afin de mieux comprendre les raisons qui mènent les élèves à associer une preuve à un rang donné, une analyse plus approfondie des justifications soumises à la question

Pré(Ind)-2b, alors qu'ils expliquent le classement établit à la question *Pré(Ind)-2a*, est nécessaire (tableau XL, p. 188).

Tableau XL. Fréquence et pourcentage de chaque type d'arguments utilisés par les élèves du groupe contrôle pour associer une preuve à un rang donné à la question Pré(Ind)-2b

	Fréquence	%
Règles du débat mathématique	68	26
Argumentation	188	74
Total	256	100

Lors du prétest, les élèves doivent expliquer « ce qui est bon et ce qui est moins bon » pour chaque solution. Ainsi, ils ont la possibilité d'expliquer leur classement en évoquant plusieurs raisons, et ce, pour les cinq solutions. C'est pour cette raison que le nombre total de justifications est supérieur au nombre d'élèves formant le groupe contrôle.

Dans l'ensemble, 256 justifications sont émises par les élèves de ce groupe. Dans 74 % des cas (catégorie « Argumentation »), les élèves acceptent ou rejettent une solution en expliquant de façon générale ce qui les pousse à faire ce choix. La première justification ci-dessous est associée à une solution retenue par un élève tandis que les deux autres justifications présentent des éléments qui ont poussé les élèves à rejeter les solutions concernées[107].

- « Elle est simple, on comprend bien, ça marche. » (S4; R1)[108]
- « Une façon assez compliquée. » (S2; R4)
- « La 5e solution est la plus mal de toutes. Les points noirs sont mélangeants. Rien de convaincant. » (S5; R5)

Le deuxième type de justifications qui revient le plus souvent est en lien avec les règles du débat mathématique. En effet, 26 % des justifications évoquées par les élèves du groupe contrôle présentent une explication où les élèves font appel à ce qui peut s'apparenter à l'une ou l'autre des cinq règles du débat mathématique proposées par Arsac et al. (1992). Il importe toutefois de jeter un coup d'œil plus approfondi sur ces

[107] Afin de faciliter la lecture des justifications données par les élèves, les fautes d'orthographe sont corrigées dans tous les extraits d'élèves présentés dans ce texte. Seules quelques expressions sont conservées afin de ne pas perdre l'essence du commentaire (par exemple, l'expression « pas comprenable » est utilisée par les élèves pour qualifier une solution difficile à comprendre).

[108] Le code entre parenthèses représente la solution ainsi que le rang donné à cette solution. Par exemple (S4; R1) signifie que la solution 4 a été placée au premier rang.

justifications afin de voir si les élèves qui ont recours à ces règles pour justifier leur pensée le font de façon adéquate. Le tableau XLI (p. 190) met en valeur les liens entre les règles du débat mathématique et chacune des cinq solutions présentées aux élèves. Dans ce cas-ci, deux règles sont interpellées dans les justifications fournies par les élèves du groupe contrôle, soit celle en lien avec l'utilisation de propriétés mathématiques et celle associée à l'utilisation d'exemples pour prouver.

Les élèves utilisent adéquatement ces deux règles dans 42,5 % de leurs justifications, alors qu'ils ne s'y conforment pas dans 57,5 % des cas. Ils semblent avoir plus de facilité à se conformer à la règle qui touche l'utilisation de propriétés mathématiques pour prouver (leur taux d'efficacité est de 25/38, comparativement à 4/30 pour la règle des exemples). Les justifications associées à la règle des propriétés mathématiques sont principalement en lien avec la solution 1 (calcul sur les énoncés) ainsi que la solution 3 (expérience mentale). Voici quelques exemples tirés des prétests des élèves :

- « Lorsqu'on remplace le nombre 2*a* par un autre nombre, 2*a* est toujours pair. Chaque fois qu'on prend un nombre pair additionné avec un nombre pair, on arrive toujours avec un nombre pair. Il explique la formule pour qu'on puisse comprendre. » (S1; R1)
- « C'est vrai si on divise un chiffre pair en 2, on ne va pas avoir de reste. » (S3; R1)

Souvent, les élèves ne font que reprendre des propos énoncés dans la solution commentée. Cela est plus ou moins surprenant, car les élèves de ce niveau ont peu exploité le développement de preuves sous cet angle.

Tableau XLI. Fréquence et pourcentage des justifications des élèves du groupe contrôle qui présentent un usage adéquat ou qui enfreignent une règle du débat mathématique pour chacune des solutions de la question Pré(Ind)-2b et taux d'efficacité de chaque règle (n = 68)

	Propriétés mathématiques					Exemples				
	Usage adéquat		Règle enfreinte			Usage adéquat		Règle enfreinte		
	F	%	F	%	Taux d'efficacité	F	%	F	%	Taux d'efficacité
1. Empirisme naïf (s4)[109]	1	1,5	1	1,5	1/2	3	4,5	15	22	3/18
2. Expérience cruciale (s2)	4	6	1	1,5	4/5	0	0	8	12	0/8
3. Exemple générique (s5)	0	0	1	1,5	0/1	1	1,5	1	1,5	1/2
5. Expérience mentale (s3)	11	16	7	10	11/18	0	0	2	3	0/2
6. Calcul sur les énoncés (s1)	9	13	3	4,5	9/12	0	0	0	0	0
Total	25	36,5	13	19	25/38	4	6	26	38,5	4/30

[109] Rappelons que les justifications liées à la solution 4 doivent être étudiées avec un certain recul, car un problème de mise en page a pu causer de la confusion chez certains élèves.

Dans 19 % des justifications, les élèves ne se conforment pas à la règle en lien avec les propriétés mathématiques. Par exemple, quelques élèves reprochent à l'expérience mentale (solution 3) de ne présenter aucun exemple.

- « J'ai bien aimé sa phrase, elle était facile à comprendre, mais il n'a pas fait de calculs. Il n'y a rien qui prouve que sa réponse est vraie. » (S3; R2)
- « Je la mets au 3^{e} rang, car elle explique bien en français, mais ne démontre aucun exemple. » (S3; R3)

De telles justifications sont associées à la règle qui touche l'utilisation de propriétés mathématiques plutôt qu'à celle qui se rapporte à l'utilisation d'exemples, car pour pouvoir parler de cette dernière règle, il faut d'abord et avant tout que des exemples soient présents dans la preuve concernée, ce qui n'est pas le cas ici. Il est donc impossible de dire que les exemples ne sont pas suffisants, car la preuve n'en contient aucun. Par conséquent, il est plus pertinent d'associer des justifications telles que celles présentées ci-dessus à la règle des propriétés mathématiques et de préciser que de telles justifications ne se conforment pas à cette règle, puisque ces élèves jugent le propos de l'expérience mentale comme insuffisant. C'est pour cette raison que ces élèves demandent qu'un ou plusieurs exemples soient ajoutés.

La deuxième règle du débat mathématique mobilisée par les élèves lorsqu'ils évaluent diverses solutions est celle en lien avec l'utilisation d'exemples pour valider un énoncé. Or, plusieurs élèves ne se conforment pas à cette règle lorsqu'ils justifient leur classement. En effet, 38,5 % des explications proposées par les élèves du groupe contrôle à la question *Pré(Ind)-2b* préconisent l'utilisation d'exemples et sont surtout associées à la solution 4, liée à l'empirisme naïf.

- « Beaucoup d'exemples pour démontrer que c'est vrai. » (S4; R1)
- « Il a essayé plusieurs possibilités. » (S4; R2)

Notons que pour bien des élèves, le terme « preuve » est un synonyme du terme « exemple », comme l'illustre la phrase suivante : « il montre des exemples, des preuves » (S4; R2)[110]. Par ailleurs, un petit nombre d'élèves, à travers 6 % des justifications, réalisent

[110] Lors des entrevues, ce lien établi par les élèves entre les termes « preuve » et « exemple » est apparu plus ou moins surprenant. En effet, deux des quatre enseignants participant à la recherche, soit un enseignant de chaque groupe, définissent l'action de prouver comme le fait de trouver plusieurs exemples qui répondent à un énoncé. La définition retenue par ces enseignants est donc reflétée dans certaines des justifications soumises par leurs élèves. Or, une analyse plus approfondie des résultats permet de remarquer que la plupart des élèves qui perçoivent ces deux termes comme des synonymes proviennent non pas de la classe où

que la simple présence d'exemples n'est pas suffisante pour valider l'énoncé. Ils reprochent alors le manque de généralité ou le manque d'explication à certaines solutions. Dans la plupart des cas, c'est la solution 4, associée à l'empirisme naïf, qui fait l'objet de telles critiques.

- « C'est bon parce que ses calculs sont vrais, mais il ne sont peut-être pas vrais pour d'autres chiffres. » (S4; R2)
- « Seulement un exemple. Pas très précis. Pas de raisonnement. » (S5; R5)

Ce dernier commentaire touche la solution 5, associée à l'exemple générique. Bien que cette solution soit pragmatique, l'idée de généralité est présente. Un tel commentaire ne devrait généralement pas s'appliquer à cette solution. Cependant, elle est considérée comme une solution associée à l'empirisme naïf qui ne présente qu'un exemple où Yvonne fait la somme de deux nombres pairs (20 et 8) et obtient un troisième nombre pair (28). Dans une telle perspective, le commentaire reflète une préoccupation quant à l'utilisation d'un seul exemple pour prouver un énoncé.

4.4.1.2 Groupe expérimental

Tout comme c'était le cas pour le groupe contrôle, la preuve globalement jugée comme la plus convaincante par les élèves du groupe expérimental est l'expérience mentale (solution 3) et la preuve considérée comme la moins convaincante est l'exemple générique (solution 5) (tableau XLII, p. 192). Il n'y a donc pas de différence entre les deux groupes à ce niveau.

Tableau XLII. Rang moyen auquel les élèves du groupe expérimental classent les solutions à la question Pré(Ind)-2a

	Rang moyen
5. Expérience mentale (s3)	2,2
6. Calcul sur les énoncés (s1)	2,6
2. Expérience cruciale (s2)	3,2
1. Empirisme naïf (s4)	3,3
3. Exemple générique (s5)	3,8

l'enseignant associe la preuve à la recherche d'exemples, mais bien de la classe où l'enseignant définit la preuve comme « une démonstration qu'une chose est vraie, avec des arguments mathématiques ». Un des enseignants précise même que de simples exemples ne suffisent pas dans un contexte de preuve. Deux hypothèses semblent plausibles : soit la définition donnée par cet enseignant ne correspond pas nécessairement aux activités de la salle de classe, soit les élèves développent ce lien à partir des premiers contacts qu'ils ont avec la notion de preuves.

Une différence entre les groupes peut être soulevée au niveau des rangs occupés par les autres solutions. Chez le groupe expérimental, une préférence pour les preuves intellectuelles est observée, puisque le calcul sur les énoncés occupe le deuxième rang. Chez le groupe contrôle, c'est l'expérience cruciale qui occupe ce rang. L'empirisme naïf se retrouve au quatrième rang dans les deux groupes.

Voyons maintenant les raisons qui poussent les élèves du groupe expérimental à associer une preuve à un rang donné (tableau XLIII, p. 193).

Tableau XLIII. Fréquence et pourcentage de chaque type d'arguments utilisés par les élèves du groupe expérimental pour associer une preuve à un rang donné à la question Pré(Ind)-2b

	Fréquence	%
Règles du débat mathématique	51	27
Argumentation	137	73
Total	188	100

Au total, 188 justifications sont émises par les élèves du groupe expérimental et elles vont dans le même sens que celles des élèves du groupe contrôle. En effet, dans les deux groupes, les types de justifications les plus populaires sont observés dans le même ordre (« Argumentation » au premier rang et « Règles du débat mathématique » au deuxième rang). La plupart des justifications (73 %) sont d'ordre général, par exemple : « elle est convaincante, car c'est très bien dit » (S1; R1). Toutes les autres justifications sont liées aux mêmes règles du débat mathématique que celles utilisées par le groupe contrôle, à l'exception d'un élève qui réfère inadéquatement à la règle du contre-exemple (tableau XLIV, p. 194).

Tableau XLIV. Fréquence et pourcentage des justifications des élèves du groupe expérimental qui présentent un usage adéquat ou qui enfreignent une règle du débat mathématique pour chacune des solutions de la question Pré(Ind)-2b et taux d'efficacité de chaque règle (n = 51)

	Propriétés mathématiques					Exemples					Contre-exemple				
	Usage adéquat		Règle enfreinte		Taux d'efficacité	Usage adéquat		Règle enfreinte		Taux d'efficacité	Usage adéquat		Règle enfreinte		Taux d'efficacité
	F	%	F	%		F	%	F	%		F	%	F	%	
1. Empirisme naïf (s4)	0	0	0	0	s/o	7	13	2	4	7/9	0	0	1	2	0/1
2. Expérience cruciale (s2)	2	4	1	2	2/3	4	8	2	4	4/6	0	0	0	0	s/o
3. Exemple générique (s5)	4	8	1	2	4/5	3	6	3	6	3/6	0	0	1	2	0/1
5. Expérience mentale (s3)	3	6	9	17	3/12	1	2	0	0	1/1	0	0	0	0	s/o
6. Calcul sur les énoncés (s1)	5	10	1	2	5/6	1	2	0	0	1/1	0	0	0	0	s/o
Total	14	28	12	23	14/26	16	31	7	14	16/23	0	0	2	4	0/2

Tout comme les élèves du groupe contrôle, la plupart du temps, les élèves du groupe expérimental utilisent la règle sur les propriétés mathématiques de façon adéquate. Notons toutefois que les élèves du groupe expérimental sont un peu moins efficaces que les élèves du groupe contrôle avec celle-ci, puisque 28 % de leurs justifications présentent un usage correct, comparativement à 36,5 % chez le groupe contrôle. Une différence plus marquée apparaît avec la règle des exemples. En effet, à travers 31 % de leurs justifications, les élèves du groupe expérimental utilisent adéquatement cette règle, tandis qu'ils l'enfreignent dans seulement 14 % des cas. Chez le groupe contrôle, il est possible de constater que seulement 6 % des justifications présentent un usage correct et que 38,5 % des justifications enfreignent une règle. Il s'agit ici d'une différence entre les deux groupes révélée par le prétest. Voici deux exemples d'arguments, formulés par les élèves, en lien avec cette règle. Les types d'arguments émis sont par ailleurs très semblables entre les deux groupes.

- « Cette solution est plus logique que les autres, car c'est une preuve mathématique, pas une preuve juste en nombre. » (S3; R1)
- « […] ce n'est pas certain que si ça fonctionne avec ces deux nombres là, que ça va fonctionner avec tous les autres nombres. » (S2; R5)

4.4.1.3 <u>Observations générales à la suite de l'analyse des résultats des questions Pré(Ind)-2a et Pré(Ind)-2b</u>

Globalement, lors du classement de cinq preuves à la question *Pré(Ind)-2a*, les élèves du groupe contrôle et les élèves du groupe expérimental accordent approximativement le même rang moyen à chaque preuve. La preuve associée à l'expérience mentale est la favorite des élèves, tandis que l'exemple générique est relégué au dernier rang du classement. D'autre part, environ le même pourcentage de justifications d'élèves de chacun des deux groupes mobilisent des règles du débat mathématique (ce pourcentage est de 26 % chez le groupe contrôle et de 27 % chez le groupe expérimental). Les deux groupes sont donc comparables à ce niveau.

La principale différence observée entre les résultats des deux groupes réside davantage dans les règles du débat mathématique qui sont utilisées adéquatement ou non lorsque les élèves justifient leur classement (*Pré(Ind)-2b*). Dans l'ensemble, les élèves du groupe expérimental utilisent adéquatement les règles du débat dans leurs justifications dans un plus grand pourcentage que les élèves du groupe contrôle. Les pourcentages sont respectivement de 59 % et 43 %. Les élèves du groupe contrôle semblent légèrement plus enclins que les élèves du groupe expérimental à utiliser adéquatement la règle relative à l'utilisation de propriétés mathématiques, alors que l'inverse est observé, et ce de façon plus marquée, pour la règle qui porte l'utilisation d'exemples pour valider un énoncé.

4.4.2 Classement de preuves par les élèves pendant l'enseignement (Act1(Eq)-2c)

Lors de la première activité, les élèves ont pu revoir le classement proposé dans le prétest, car la solution 4 (empirisme naïf) y était mal disposée. Étant donné la confusion qui entoure les premiers classements produits par les élèves (lors du prétest, à la question *Pré(Ind)-2a* et lors de la première activité individuelle, à la question *Act1(Ind)-2* il semble pertinent de présenter le dernier classement, établi en équipe, car celui-ci est déterminé à la suite de la précision sur la disposition de la solution associée à l'empirisme naïf (solution 4). Par ailleurs, il importe de préciser que les élèves des deux classes qui forment le groupe expérimental ont participé au travail d'équipe lors de la première activité. Cependant, près de la moitié de ces élèves n'indiquent pas de classement final. Dans la majorité des cas, ces élèves font partie de la même classe. Il est possible qu'il y ait eu confusion et que les élèves aient compris qu'ils devaient seulement indiquer un nouveau classement si celui-ci différait du classement proposé lors du travail individuel. Il est également probable que certaines équipes n'ont pas pu s'entendre sur un classement et ont préféré ne rien indiquer. Étant donné que nous n'avons aucune indication sur les copies des élèves qui nous permette de retenir l'une ou l'autre de ces conjectures, nous préférons tout simplement indiquer qu'aucune preuve n'est associée à chacun des rangs donnés. Le pourcentage d'élèves de chacun des deux groupes qui accordent un certain rang à chaque preuve lors du travail d'équipe est présenté au tableau XCVII (annexe 26, p. 390).

Les classements soumis par les élèves permettent de remarquer que dans les deux groupes, les élèves démontrent une préférence pour les preuves intellectuelles, particulièrement pour l'expérience mentale. Une observation semblable a été faite lors de l'analyse des résultats du prétest. La solution qui, selon les élèves des deux groupes, est la moins convaincante est l'exemple générique. Cela s'explique par le fait que plusieurs élèves considèrent cette solution comme un simple exemple qui peut être remplacé par « 20 + 8 = 28 ». Quelques-uns précisent même qu'ils classent cette solution au cinquième rang parce que compter les petits points demande trop de temps. Ils ne voient pas la généralisation possible à partir du dessin qui est présenté.

Afin de prendre en considération l'ensemble des classements attribués à chaque preuve, voyons les rangs moyens présentés au tableau XLV (p. 197).

Tableau XLV. Rang moyen auquel les élèves de chacun des deux groupes classent les solutions à la question Act1(Eq)-2c

	Groupe contrôle	Groupe expérimental
1. Empirisme naïf (s4)	3,9	3,1
2. Expérience cruciale (s2)	3,2	2,8
3. Exemple générique (s5)	3,7	3,9
5. Expérience mentale (s3)	1,7	2,0
6. Calcul sur les énoncés (s1)	2,5	3,2

4.4.2.1 <u>Groupe contrôle</u>

La fréquence où chaque solution est attribuée à un rang donné est prise en compte lors du calcul du rang moyen. Le rang moyen attribué à chaque solution par les élèves du groupe contrôle est présenté au tableau XLVI (p. 197).

Tableau XLVI. Rang moyen auquel les élèves du groupe contrôle classent les solutions à la question Act1(Eq)-2c

	Rang moyen
5. Expérience mentale (s3)	1,7
6. Calcul sur les énoncés (s1)	2,5
2. Expérience cruciale (s2)	3,2
3. Exemple générique (s5)	3,7
1. Empirisme naïf (s4)	3,9

Une comparaison des rangs moyens obtenus lors du travail individuel au prétest et lors du travail d'équipe à l'activité 1 permet de remarquer que l'expérience mentale (solution 3) conserve son premier rang, sans doute à cause de son caractère explicatif. Le calcul sur les énoncés qui était au troisième rang au prétest se trouve maintenant au deuxième rang, de telle sorte que les deux preuves intellectuelles semblent gagner la faveur des élèves du groupe contrôle. Les preuves pragmatiques associées à l'empirisme naïf et à l'exemple générique, quant à elles, demeurent aux quatrième et cinquième rangs dans le prétest et la première activité, mais leur ordre est inversé d'une activité à l'autre.

4.4.2.2 Groupe expérimental

Le rang moyen calculé pour chacune des solutions classées par les élèves du groupe expérimental est présenté au tableau XLVII (p. 198).

Tableau XLVII. Rang moyen auquel les élèves du groupe expérimental classent les solutions à la question Act1(Eq)-2c

	Rang moyen
5. Expérience mentale (s3)	2,0
2. Expérience cruciale (s2)	2,8
1. Empirisme naïf (s4)	3,1
6. Calcul sur les énoncés (s1)	3,2
3. Exemple générique (s5)	3,9

Chez le groupe expérimental, les preuves qui occupent le premier et le dernier rang sont les mêmes que celles qui sont ressorties à la question *Pré(Ind)-2a*. Ainsi, l'expérience mentale (solution 3) conserve le premier rang et l'exemple générique (solution 5) se retrouve au dernier rang. La préférence pour l'expérience mentale peut sans doute être expliquée en partie par le fait que cette solution comporte un caractère explicatif. Tandis que pour le groupe contrôle, le calcul sur les énoncés progresse du troisième au deuxième rang entre le prétest et l'activité 1, chez le groupe expérimental, nous observons une régression de ce type de solution (passage du deuxième au quatrième rang). Il est difficile pour le moment de proposer une explication. L'analyse de l'activité 2 nous permettra de voir qu'il s'agit d'une tendance.

4.4.2.3 Observations générales à la suite de l'analyse des résultats de la question Act1(Eq)-2c

Rappelons que le travail d'équipe à la question *Act1(Eq)-2c* vise à amener les élèves à classer cinq preuves. Dans l'ensemble, un seul élément est commun au groupe contrôle et au groupe expérimental, soit la preuve qui obtient le meilleur rang moyen, l'expérience mentale (solution 3). Tous les autres rangs occupés par les preuves et déterminés par les rangs moyens sont différents. De façon globale, les élève du groupe contrôle privilégient les preuves intellectuelles (expérience mentale et calcul sur les énoncés) et relèguent la preuve par empirisme naïf (preuve pragmatique) au dernier rang. Chez le groupe expérimental, il est plus difficile de cibler si ce sont les preuves pragmatiques ou les preuves intellectuelles qui sont préférées par les élèves. En effet, bien que ce soit une preuve intellectuelle qui se retrouve au premier rang du classement (selon les rangs moyens), ce sont deux preuves pragmatiques (expérience cruciale et empirisme naïf) qui occupent le deuxième et le troisième rang.

4.4.3 Classement de preuves (Post(Ind)-9a) et justifications des élèves (Post(Ind)-9b) au post-test

La question *Post(Ind)-9a* amène les élèves des deux groupes à classer cinq preuves[111] développées par des élèves fictifs qui valident l'énoncé suivant : *La somme de 3 nombres naturels consécutifs est toujours multiple de 3*. Le pourcentage d'élèves qui attribuent chaque preuve à un rang donné lors du travail sur papier est présenté au tableau XCIX (annexe 27, p. 392).

Les choix des élèves des deux groupes sont les mêmes dans les extrémités du classement (premier et dernier rangs), alors que leurs choix diffèrent pour les deuxième, troisième et quatrième rangs. Chez les deux groupes, le premier rang est principalement attribué à la preuve par empirisme naïf (solution 4). Cela coïncide avec les résultats de Healy et Hoyles (2000) selon lesquels les élèves sont convaincus par des exemples. Il est tout de même possible de remarquer que 25 % des élèves du groupe expérimental accorde le premier rang à la preuve associée au calcul sur les énoncés. Ce type de preuves suit donc de près la preuve par empirisme naïf, que 28 % des élèves placent au premier rang. C'est l'exemple générique (solution 3) qui est placé au dernier rang le plus souvent par les élèves des deux groupes. Les élèves semblent éprouver de la difficulté à reconnaître la possibilité de généraliser qui se dégage de cette solution. La même situation est observée dans le prétest. En fait, plusieurs élèves avouent ne pas comprendre cette solution. Étant donné le niveau des élèves, il aurait probablement été préférable d'ajouter quelques phrases au schéma afin d'expliquer le raisonnement qui sous-tend cette solution.

À partir de ces résultats, il peut être difficile de rattacher un rang définitif à chacune des solutions. Il s'avère donc nécessaire de calculer le rang moyen associé à chaque preuve (tableau XLVIII, p. 200).

[111] Voir p. 112 pour un rappel des cinq preuves présentées aux élèves.

Tableau XLVIII. Rang moyen auquel les élèves de chacun des deux groupes classent les solutions à la question Post(Ind)-9a

	Groupe contrôle	Groupe expérimental
1. Empirisme naïf (s4)	1,6	2,5
2. Expérience cruciale (s5)	2,7	3,4
3. Exemple générique (s3)	4,0	3,3
5. Expérience mentale (s1)	3,6	2,9
6. Calcul sur les énoncés (s2)	3,2	2,9

De prime abord, il est possible d'observer une différence assez importante entre les deux groupes en ce qui a trait à l'écart entre le premier et le dernier rang moyen. Chez le groupe contrôle, l'écart entre ces rangs est de 2,4 tandis que chez le groupe expérimental, cet écart est de 0,9. Un tel écart chez le groupe contrôle reflète une certaine unanimité dans le choix des preuves attribuées à chaque rang donné, du moins en ce qui concerne le premier et le cinquième rang. Chez le groupe expérimental, cet écart est beaucoup plus petit, ce qui témoigne d'un moins grand consensus chez les élèves de ce groupe.

4.4.3.1 <u>Groupe contrôle</u>

Les rangs moyens calculés à partir des classements des élèves du groupe contrôle sont présentés au tableau XLIX (p. 200).

Tableau XLIX. Rang moyen auquel les élèves du groupe contrôle classent les solutions à la question Post(Ind)-9a

	Rang moyen
1. Empirisme naïf (s4)	1,6
2. Expérience cruciale (s5)	2,7
6. Calcul sur les énoncés (s2)	3,2
5. Expérience mentale (s1)	3,6
3. Exemple générique (s3)	4,0

Les résultats du groupe contrôle entre le prétest et le post-test sont les mêmes, sauf que les rangs accordés à l'empirisme naïf et à l'expérience mentale sont inversés (passage du quatrième au premier rang et vice-versa). Ces changements font en sorte que les deux solutions les plus populaires chez les élèves de ce groupe sont des solutions pragmatiques. Ainsi, plutôt qu'observer un passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles, comme nous aurions pu nous y attendre, nous observons le contraire. Ce passage des preuves intellectuelles aux preuves pragmatiques représente peut-être une transition de ce que l'enseignant préfère à ce qui, comme élève, permet réellement de comprendre. Ce passage peut également être associé au fait qu'un nombre assez important d'élèves indiquent ne pas comprendre les différentes solutions en jeu. Un élève précise même qu'il « ne comprend pas son problème, il est trop compliqué ». Il est donc possible que la compréhension de l'énoncé soit plus complexe dans le post-test que dans le prétest. Par exemple, la notion de « multiple » évoquée à la question *Post(Ind)-9a* peut être problématique pour les élèves. Il importe toutefois de noter qu'avant de soumettre cette question aux élèves, une vérification a été faite auprès des quatre enseignants afin de confirmer le fait que les élèves possédaient les connaissances nécessaires pour comprendre cet énoncé. Les enseignants ont même insisté pour que le terme « multiple » soit utilisé, car ce terme fait partie du vocabulaire que les élèves doivent posséder. Ainsi, soit les élèves ne connaissent pas la signification du terme « multiple » (malgré les attentes de leur enseignant), soit un autre élément du problème, qui nous est inconnu, le rend plus compliqué pour les élèves. Finalement, les troisième, quatrième et cinquième rangs sont occupés, respectivement, par les solutions 2 (calcul sur les énoncés), 1 (expérience mentale) et 3 (exemple générique), c'est-à-dire les trois types de preuves présentant un caractère de généralité.

Dans le but de mieux comprendre les raisons qui poussent les élèves du groupe contrôle à placer à un rang donné une certaine solution, une analyse des justifications soumises par ces élèves à la question *Post(Ind)-9b* s'impose (tableau L, p. 201).

Tableau L. Fréquence et pourcentage de chaque type d'arguments utilisés par les élèves du groupe contrôle pour associer une preuve à un rang donné à la question Post(Ind)-9b

	Fréquence	%
Règles du débat mathématique	45	20
Argumentation	179	80
Total	224	100

Un total de 224 commentaires visant à expliquer le classement soumis à la question *Post(Ind)-9a* sont présentés à la question *Post(Ind)-9b*. Le nombre de commentaires est de beaucoup supérieur au nombre d'élèves dans le groupe, car chaque élève doit commenter les cinq solutions en jeu. De plus, chaque solution peut générer plus d'un commentaire. Les pourcentages de chaque type de justifications donnés par les élèves du groupe contrôle lors du post-test sont sensiblement les mêmes que ceux observés dans le prétest. Dans la majorité des cas (80 %), les justifications des élèves consistent à expliquer de façon générale ce qui motive leur choix. Voici un exemple de telles justifications : « la solution # 2 est bonne, parce qu'il l'explique vraiment bien » (S2; R1).

Ce qui diffère, dans le cas du post-test, c'est que plus d'élèves mentionnent la présence de l'algèbre dans la solution associée au calcul sur les énoncés (solution 2) pour justifier leur choix. Selon les élèves, dans certains cas, l'utilisation de l'algèbre garantit l'obtention d'une bonne solution alors que dans d'autres, elle complique la compréhension de la solution.

- « L'algèbre est compliquée, mais c'est la méthode la plus sure d'avoir une réponse correcte. » (S2; R1)
- « La plus convaincante, car il explique avec de l'algèbre. » (S2; R1)
- « J'ai de la difficulté à comprendre avec tous ces *n*. » (S2; R4)
- « Trop long et trop compliqué à comprendre. L'algèbre complique tout. » (S2; R5)

Il y a de fortes chances que les commentaires dans lesquels l'utilisation de l'algèbre est perçue comme un élément positif soient influencés par l'institutionnalisation faite lors du déroulement « normal » de la salle de classe ou lors des activités réalisées antérieurement dans le cadre de cette expérimentation. En effet, si l'enseignant a insisté sur la possibilité de généraliser grâce à l'utilisation de l'algèbre, cela peut expliquer certains commentaires des élèves.

Au total, 20 % des justifications des élèves font référence à la règle sur l'utilisation de propriétés mathématiques ou à celle sur la non-suffisance des exemples pour prouver. Les liens établis entre chacune des cinq solutions et les deux règles du débat mathématique mobilisées par les élèves sont mis de l'avant dans le tableau LI (p. 203).

Tableau LI. Fréquence et pourcentage des justifications des élèves du groupe contrôle qui présentent un usage adéquat ou qui enfreignent une règle du débat mathématique pour chacune des solutions de la question Post(Ind)-9b et taux d'efficacité de chaque règle (n = 45)

	Propriétés mathématiques					Exemples				
	Usage adéquat		Règle enfreinte			Usage adéquat		Règle enfreinte		
	F	%	F	%	Taux d'efficacité	F	%	F	%	Taux d'efficacité
1. Empirisme naïf (s4)	2	4	0	0	2/2	2	4	7	16	2/9
2. Expérience cruciale (s5)	0	0	1	3	0/1	3	7	10	22	3/13
3. Exemple générique (s3)	0	0	5	11	0/5	0	0	0	0	s/o
5. Expérience mentale (s1)	1	3	12	26	1/13	0	0	0	0	s/o
6. Calcul sur les énoncés (s2)	0	0	2	4	0/2	0	0	0	0	s/o
Total	3	7	20	44	3/23	5	11	17	38	5/22

Dans 18 % des cas, les élèves mobilisent correctement l'une de ces deux règles pour expliquer leurs choix, alors que dans 82 % des cas, ils enfreignent l'une de ces règles. Ces résultats sont étonnants, car ils reflètent un certain recul de la part des élèves en ce qui a trait à la mobilisation des règles. En effet, lors du prétest, un peu plus de 40 % des commentaires des élèves du groupe contrôle se conformaient aux règles du débat mathématique à travers leurs explications.

Dans l'ensemble, le taux d'efficacité associé à la règle qui se fonde sur l'utilisation de propriétés mathématiques pour prouver est de 3/23. La justification ci-dessous présente les éléments soulevés par un élève pour accepter la solution 1 (expérience mentale).

- « Je trouve que son raisonnement est logique et est vrai, parce que :

  5 + 6 + 7 = 6 + 6 + 6

  +1

  12 + 13 + 14 = 13 + 13 + 13

  +1

  C'est comme si on additionnait le nombre 3 fois, mais d'une autre manière. »

  (S1; R1)

Le pourcentage de commentaires qui enfreignent la règle selon laquelle une preuve est basée sur l'utilisation de propriétés mathématiques est nettement plus élevé (44 %) que le pourcentage de commentaires dans lesquels elle est utilisée adéquatement (7 %). La plus grande partie des commentaires qui enfreignent cette règle concernent la solution 1 (expérience mentale) et constituent un reproche par rapport à l'absence d'exemples dans cette solution. En voici un exemple : « marie nous explique, mais ne nous donne aucun exemple pour prouver son explication » (S1; R5). Vu que ces élèves ne réalisent pas que l'information présente dans les preuves intellectuelles est suffisante pour prouver et que, par le fait même, ces preuves n'ont pas besoin de présenter des exemples pour être jugées comme étant complètes, nous considérons que ces élèves ne se conforment pas à la règle touchant les propriétés mathématiques.

L'autre règle du débat mathématique qui ressort des justifications des élèves du groupe contrôle est en lien avec l'utilisation d'exemples pour prouver (son taux d'efficacité est de 5/22). Les justifications sont toutes associées à une preuve pragmatique, à savoir la solution 4 (empirisme naïf) ou la solution 5 (expérience cruciale). En voici un exemple :

« solution 4 et 5 sont juste des exemples, ça ne nous convainc pas que cela marche pour tous les exemples » (S4; R3 et S5; R4).

Encore une fois, un nombre plus important de justifications enfreignent cette règle (38 %). Toutes ces justifications concernent les solutions 4 (empirisme naïf) et 5 (expérience cruciale). Voyons un exemple de justification pour chacune de ces solutions :

- « La solution #4 est bonne, parce qu'il donne 3 exemples et les 3 sont bons. » (S4; R2)
- « C'était très intelligent de penser aux gros nombres, alors je l'ai choisi pour #2. » (S5; R2)

4.4.3.2 Groupe expérimental

À partir du calcul des rangs moyens, il est possible de constater que c'est la solution 4, associée à l'empirisme naïf, qui est globalement préférée par les élèves du groupe expérimental (tableau LII, p. 205). Elle est donc passée du quatrième rang au prétest au premier rang au post-test. Tout comme pour le groupe contrôle, cela peut être expliqué par le fait que les élèves, plutôt que de vouloir plaire à l'enseignant, cherchent réellement à comprendre les preuves qui leur sont présentées.

Tableau LII. Rang moyen auquel les élèves du groupe expérimental classent les solutions à la question Post(Ind)-9a

	Rang moyen
1. Empirisme naïf (s4)	2,5
5. Expérience mentale (s1)	2,9
6. Calcul sur les énoncés (s2)	2,9
3. Exemple générique (s3)	3,3
2. Expérience cruciale (s5)	3,4

Les deux preuves intellectuelles, soit l'expérience mentale (solution 1) et le calcul sur les énoncés (solution 2) sont ex æquo au deuxième rang. Si les exemples présentent un attrait incontestable pour les élèves du groupe contrôle et pour ceux du groupe expérimental (les rangs moyens étant respectivement de 1,6 et 2,5), il n'en reste pas moins que chez le groupe expérimental, les preuves intellectuelles se situent tout juste derrière la preuve par empirisme naïf (la preuve par expérience mentale et le calcul sur les énoncés obtiennent chacun un rang moyen de 2,9). Ce groupe se démarque ainsi du groupe contrôle pour lequel l'écart entre le rang moyen de la preuve par empirisme naïf et les rangs moyens associés aux preuves intellectuelles est beaucoup plus important (chez le groupe contrôle, l'écart est de 2 alors qu'il est de 0,4 chez le groupe expérimental). Les deux solutions qui se trouvent aux quatrième et cinquième rangs sont respectivement l'exemple générique (solution 3) et l'expérience cruciale (solution 5). Chaque fois où l'expérience cruciale a été présentée aux élèves, elle a semblé peu appréciée.

Afin de mieux comprendre les choix des élèves, voyons les différentes raisons qu'ils évoquent pour justifier leur classement (tableau LIII, p. 206).

Tableau LIII. Fréquence et pourcentage de chaque type d'arguments utilisés par les élèves du groupe expérimental pour associer une preuve à un rang donné à la question Post(Ind)-9b

	Fréquence	%
Règles du débat mathématique	36	28
Argumentation	94	72
Total	130	100

Les élèves du groupe expérimental présentent un total de 130 justifications lorsqu'ils répondent à la question *Post(Ind)-9b*. L'argumentation est la plus utilisée (72 %), que ce soit pour accepter ou rejeter une solution. En voici deux exemples :

- « Parce que c'est la plus logique. » (S1; R1)
- « Beaucoup trop de mots inutiles. » (S1; R4)

Dans le post-test, alors que les élèves du groupe contrôle soulignent souvent la présence de l'algèbre pour accorder un certain rang à une solution, les élèves du groupe expérimental font plutôt appel au potentiel de généralisation que présentent différentes solutions. C'est toujours la possibilité de généraliser qui apparaît dans les commentaires des élèves pour accepter une solution (et non l'impossibilité de généraliser qui mène au rejet d'une solution).

- « Bien expliqué et ça couvre toutes les possibilités. » (S1; R1)
- « Parce que la 2 peut marcher avec n'importe quel nombre. » (S2; R1)
- « Très visuelle, simple, facile à comprendre et fonctionne avec tous les chiffres. » (S3; R1)

À travers 28 % de l'ensemble des justifications, les élèves mobilisent l'une des trois règles du débat mathématique observées lors du prétest, soit celles en lien avec le contre-exemple, les propriétés mathématiques et les exemples.

Le tableau LIV (p. 208) met en évidence la fréquence des justifications soumises par les élèves du groupe expérimental qui utilisent adéquatement ou qui enfreignent ces trois règles du débat mathématique. Le taux d'efficacité de l'utilisation de chacune des règles en jeu est également précisé dans ce tableau. La même observation qui est faite auprès du groupe contrôle peut être faite avec le groupe expérimental, soit que les élèves affichent plus de difficulté à utiliser correctement les règles du débat mathématique dans le post-test que dans le prétest. Dans le post-test, seule une règle du débat mathématique, soit celle sur les exemples, est utilisée adéquatement par les élèves avec un taux d'efficacité de 9/16. Les justifications sont toutes liées aux solutions 4 (empirisme naïf) et 5 (exemple générique) et présentent une critique par rapport au fait que ces deux preuves ne comportent que des exemples.

- « [La solution 4] est au 3^{e} rang, car même si ça fonctionne avec trois suites de nombres, cela ne veut pas dire que ça fonctionne pour tous les nombres. » (S4; R3)
- « Couvre seulement une possibilité. » (S5; R5)

Dans tous les autres cas (27 des 36 justifications), les commentaires des élèves enfreignent l'une des trois règles du débat mathématique en jeu. C'est de loin la règle qui précise l'importance de s'appuyer sur des propriétés mathématiques qui est la plus problématique. En effet, 19 justifications avancées par les élèves du groupe expérimental enfreignent cette règle. Le plus grand nombre de ces commentaires reprochent au calcul sur les énoncés (solution 2) ou à l'expérience mentale (solution 3) de ne pas présenter plus d'exemples :

- « Il ne nous montre pas un exemple alors on ne sait pas qu'est-ce qu'il nous dit. » (S1; R4)
- « J'ai classé la solution 1 la dernière, parce que ce n'était que des mots. » (S1; R5)

Tableau LIV. Fréquence des justifications des élèves du groupe expérimental qui présentent un usage adéquat ou qui enfreignent une règle du débat mathématique pour chacune des solutions de la question Post(Ind)-9b et taux d'efficacité de chaque règle (n = 36)

	Propriétés mathématiques			Exemples			Contre-exemple		
	Usage adéquat	Règle enfreinte	Taux d'efficacité	Usage adéquat	Règle enfreinte	Taux d'efficacité	Usage adéquat	Règle enfreinte	Taux d'efficacité
1. Empirisme naïf (s4)	0	3	0/3	4	2	4/6	0	1	0/1
2. Expérience cruciale (s2)	0	2	0/2	0	0	s/o	0	0	s/o
3. Exemple générique (s5)	0	3	0/3	5	4	5/9	0	0	s/o
5. Expérience mentale (s3)	0	4	0/4	0	1	0/1	0	0	s/o
6. Calcul sur les énoncés (s1)	0	7	0/7	0	0	s/o	0	0	s/o
Total	0	19	0/19	9	7	9/16	0	1	0/1

D'autres élèves, dont les justifications ne se conforment également pas à cette règle, du débat mathématique, présentent tout simplement un énoncé qui est faux. Les élèves mobilisent donc cette règle, mais les éléments soulevés pour appuyer leur raisonnement sont mathématiquement incorrects.

- « 90 n'est pas un multiple de 3. 48 non plus. 6 est un multiple de 3. » (S4; R4)
- « Tout nombre n'est pas multiple de 3. Tout nombre naturel est multiple de 3. » (S5; R4)

La deuxième règle la plus enfreinte dans les justifications des élèves concerne la simple utilisation d'exemples pour prouver. Dans l'ensemble, sept des 36 commentaires des élèves qui touchent une règle du débat mathématique mettent de l'avant une appréciation particulière pour une solution pragmatique parce que cette dernière présente un certain nombre d'exemples ou parce que la qualité des exemples choisis plait aux élèves. Évidemment, ce genre de commentaires est uniquement associé aux solutions 3 (exemple générique), 4 (empirisme naïf) et 5 (expérience cruciale), soit aux solutions qui présentent un exemple.

- « Très facile à comprendre, car il ne faut que voir les problèmes. » (S4; R1)
- « La 5 me convainc le plus, car il a pris de gros chiffres pour prouver. » (S5; R1)
- « Donne un bon exemple. » (S3; R2)

Enfin, le même élève qui insiste sur l'importance de la présence d'un contre-exemple dans le prétest ramène cet élément dans le post-test en critiquant l'absence de contre-exemple dans la solution 4.

4.4.3.3 **Observations générales à la suite de l'analyse des résultats des questions Post(Ind)-9a et Post(Ind)-9b**

Deux éléments ressortent de l'analyse des questions *Post(Ind)-9a* et *Post(Ind)-9b*, où les élèves ont à classer cinq preuves et à justifier leur classement. Premièrement, chez les deux groupes, il est possible d'observer un passage d'une préférence pour des preuves intellectuelles à une préférence pour une preuve pragmatique, plus précisément pour une preuve associée à l'empirisme naïf (solution 4). Comment expliquer que les élèves délaissent des solutions intellectuelles, qui permettent la généralisation, pour se diriger vers des solutions plus empiriques? Pour répondre à cette question, il importe de jeter un coup d'œil particulier sur la tâche présentée aux élèves. Bien que tous les problèmes aient d’abord été validés par les quatre enseignants, il semble que la compréhension des éléments en jeu dans l’énoncé de la question *Post(Ind)-9b* soit problématique pour plusieurs élèves. En fait, beaucoup plus d’élèves des deux groupes affirment ne pas comprendre les preuves qui leur sont présentées dans le post-test que dans le prétest. Une deuxième explication, en lien avec le contrat didactique, est également plausible. Étant donné que des documents ont été remis aux enseignants afin de guider l’institutionnalisation en salle de classe et que ces derniers ont affirmé avoir respecté les directives qui leur ont été données, nous supposons que l’institutionnalisation qui a été faite dans chacun des groupes est la même et que, par conséquent, les preuves intellectuelles ont été identifiées comme étant plus puissantes du point de vue des mathématiques. Ainsi, il est possible que la priorité des élèves de chacun des deux groupes soit passée de la volonté de plaire à l’enseignant (donc de choisir une preuve intellectuelle), à la volonté de réellement comprendre et être en mesure de justifier ses choix. Cela pourrait expliquer pourquoi les élèves, dans le prétest, favorisent les preuves intellectuelles alors que dans le post-test, ils optent davantage pour les preuves pragmatiques.

Le deuxième élément intéressant émerge lors de l’analyse des justifications des élèves. Malgré le fait que les deux groupes ont plus de difficulté à utiliser adéquatement les règles du débat mathématique dans le post-test que dans le prétest, il semble y avoir un souci plus prononcé pour des éléments couramment associés au calcul sur les énoncés, soit le formalisme et le caractère de généralité. Par exemple, les commentaires de quelques élèves du groupe contrôle sont fondés sur la présence ou l’absence d’algèbre. De tels commentaires apparaissent à peine dans les commentaires rassemblés dans le prétest. Dans un même ordre d’idée, dans le post-test, les élèves du groupe expérimental accordent une importance particulière à la généralisation. Évidemment, l’algèbre est souvent utilisée dans les preuves qui présentent un degré de généralisation élevé. Il est donc possible de supposer que les élèves du groupe contrôle tentent de parler de généralisation, mais de façon inconsciente. Or, les élèves du groupe expérimental semblent reconnaître qu’une solution peut être généralisable, même si elle n’est pas algébrique et ils peuvent le dire explicitement. Ce caractère de généralité relèverait ainsi, pour eux, davantage d’un savoir, alors qu’il apparaît peut-être plus comme une connaissance pour les élèves du groupe contrôle. Comme, en principe, des institutionnalisations semblables ont été faites dans les deux groupes, nous pouvons penser que le rôle du langage dans la conceptualisation et dans le passage de connaissance à savoir serait ici mis en évidence et serait possiblement favorisé ou du moins travaillé par les échanges qui ont lieu dans le forum électronique.

4.4.4 **Conclusion sur la 2^e^ question de recherche : habiletés en lien avec l'évaluation de preuves – Classement de preuves**

La deuxième question de recherche touche les habiletés en lien avec l'évaluation de preuves. Pendant l'expérimentation, à quatre reprises, les élèves ont eu à classer des preuves puis à justifier ce classement : *Pré(Ind)-2a* et *Pré(Ind)-2b*, *Act1(Ind)-2*, *Act1(Eq)-2c* et *Post(Ind)-9a* et *Post(Ind)-9b*.

Le principal élément qui ressort de l'analyse des questions qui touchent le classement de preuves par les élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental réside dans le passage d'une préférence pour l'expérience mentale (preuve intellectuelle) vers une préférence pour l'empirisme naïf (preuve pragmatique) entre le prétest et le post-test. Or, après la série d'activités réalisées par les élèves, il n'aurait pas été déraisonnable de penser qu'ils auraient délaissé les preuves pragmatiques pour opter davantage pour des preuves intellectuelles. Nous posons la conjecture selon laquelle ce passage d'un type de preuves à un autre peut être expliqué par le poids du contrat didactique lors des différentes activités. À notre avis, dans le cadre de notre expérimentation, les deux catégories de preuves identifiées par Healy et Hoyles (2000) peuvent expliquer les choix des élèves. Dans le prétest, les élèves semblent avoir privilégié la preuve qui leur permet d'obtenir la meilleure note (c'est-à-dire celles préférées par leur enseignant et identifiées, pendant l'institutionnalisation, comme étant les plus puissantes d'un point de vue mathématique). Dans le post-test, ils ont plutôt l'air d'avoir favorisé la preuve qu'ils préfèrent personnellement. Or, nous avons vu que lorsqu'ils ont à développer des preuves, les élèves du groupe contrôle développent, de façon assez constante, des preuves pragmatiques tandis qu'un passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles (plus précisément à la preuve par expérience mentale) peut être observé chez les élèves du groupe expérimental. Comment expliquer, pour le groupe expérimental, qu'un passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles se fait lors du développement de preuves alors qu'un passage des preuves intellectuelles aux preuves pragmatiques est observé lorsque les élèves ont à classer des preuves? Si nous supposons que les élèves des deux groupes ont reçu la même information lors de l'institutionnalisation, soit que les preuves intellectuelles sont plus puissantes d'un point de vue mathématique, il y a lieu de se questionner afin de savoir si c'est bel et bien le contrat didactique qui influence les élèves dans le prétest lorsqu'il est question d'associer une preuve à un classement donné. Si c'est effectivement le cas, pourquoi ce même contrat n'influence-t-il pas les élèves lorsqu'ils développent des preuves? En fait, il est important de réaliser que lire une preuve formelle (plus particulièrement un calcul sur les énoncés) peut être difficile pour les élèves, étant donné que tous les éléments implicites ne sont pas donnés. Ils doivent donc, pour réellement comprendre la preuve, comprendre ses sous-entendus. Lorsqu'ils ont à développer une preuve, la situation est différente, car ils se retrouvent dans une position qui leur permet de clairement formuler ces éléments qui, dans un calcul sur les énoncés, sont parfois évacués. C'est possiblement pour cette raison que les élèves du groupe expérimental, lorsqu'ils passent aux preuves intellectuelles lors du développement de preuves, présentent d'abord et avant tout des preuves par expérience mentale, où chaque partie du raisonnement est davantage explicitée. Ils se sentent plus à l'aise de développer une expérience mentale qu'un calcul sur les énoncés. Dès lors, quelle influence peut être attribuée à l'utilisation du forum électronique sur ces changements observés chez le groupe expérimental? À notre avis, l'influence du forum électronique n'est pas tant liée aux changements observés lors du classement de preuves qu'à ceux observés lors du développement de preuves. En effet, le passage d'un type de preuves à un autre lors des activités qui touchent le classement de différents types de preuves est noté chez les deux groupes. Si le forum électronique avait réellement une influence, les changements chez le groupe expérimental seraient plus marqués.

En ce qui a trait aux types d'arguments soulevés par les élèves de chacun des deux groupes pour justifier leur classement, il n'y a pas de différence entre les résultats du prétest et ceux du post-test. Les pourcentages d'élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental qui mobilisent une règle du débat mathématique pour expliquer leur choix sont sensiblement les mêmes d'un groupe à l'autre et d'un test à l'autre. Certaines différences sont toutefois notées au niveau de l'utilisation que les élèves font de ces règles. Malgré le fait que dans les deux groupes, entre le prétest et le post-test, il est possible d'observer une diminution du pourcentage de commentaires qui présentent un usage adéquat d'une règle du débat et une augmentation du pourcentage de commentaires qui enfreignent une règle, il demeure que, de façon générale, les élèves du groupe expérimental utilisent adéquatement les règles du débat mathématique dans un plus grand pourcentage que les élèves du groupe contrôle. Les traces des échanges dans le forum électronique permettent peut-être aux élèves de prendre conscience de différents arguments pouvant être utilisés en faveur ou en défaveur d'une preuve. Ainsi, dès qu'ils déterminent la validité d'une preuve, ils sont exposés à plusieurs justifications qui n'ont pas nécessairement le même poids d'un point de vue mathématique. Ils se retrouvent également devant des messages qui évaluent la pertinence de ces justifications. Étant donné que les élèves du groupe expérimental démontrent une plus grande utilisation adéquate des règles du débat mathématique que les élèves du groupe contrôle, il est plausible de penser que le forum électronique permet, grâce à une exposition à un plus grand nombre d'arguments et à une évaluation de ces arguments, de développer une plus grande compréhension de l'utilisation qui doit être faite des règles du débat mathématique.

4.5 2e question de recherche : habiletés en lien avec l'évaluation de preuves – Validation et invalidation de preuves

L'analyse des productions d'élèves du groupe contrôle (travail sur papier) et du groupe expérimental (travail sur papier et dans le forum électronique) lors des activités où ils ont à préciser les raisons qui les ont conduits à valider ou à invalider des preuves nous permettent de répondre à notre deuxième question de recherche, à savoir :

2. Quelle est l'influence de l'utilisation d'un forum électronique, lors de la réalisation d'activités en algèbre, sur le développement d'habiletés en lien avec l'évaluation de preuves ou de solutions chez des élèves qui en sont à leur 8e année de scolarité?
    i. Quelles sont les règles du débat mathématique mobilisées par les élèves, en salle de classe (papier-crayon) ou dans un forum électronique, pour valider ou invalider une preuve ou une solution développée pour répondre à un problème algébrique?

Lors de notre expérimentation, à cinq reprises, les élèves sont invités à valider ou invalider des preuves réalisées par certains de leurs pairs ou par des élèves fictifs : *Act2(Eq)-4a* et *Act2(Eq)-4b*[112], *Act2(Eq)-5a* et *Act2(Eq)-5b* et *Act3(Ind)-6a* et *Act3(Ind)-6b*.

[112] À la question *a*, les élèves doivent identifier les preuves ou les solutions qu'ils retiennent. À la question *b*, ils doivent identifier les preuves ou les solutions qu'ils rejettent.

Ce genre d'activité vise à faire émerger les règles du débat mathématique auxquelles les élèves font appel lorsqu'ils se retrouvent en situation de validation.

4.5.1 Preuves retenues et rejetées par les élèves pendant l'enseignement (Act2(Eq)-4a et Act2(Eq)-4b)

Lors de la deuxième activité, les élèves ont d'abord à répondre à la question *Act2(Ind)-4* de façon individuelle : *Dans l'expression* $n \times n - n + 11$, *si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre premier?* Par la suite, lors du travail en équipe, ils ont à identifier les solutions proposées par les membres de leur équipe qu'ils retiennent (*Act2(Eq)-4a*) et qu'ils rejettent (*Act2(Eq)-4b*). Dans les deux cas, ils sont invités à justifier leur choix. Étant donné que chaque solution développée à la question *Act2(Ind)-4* se trouve à être évaluée par tous les membres d'une équipe, il est impossible pour nous de présenter l'ensemble des solutions évaluées dans le cadre de cette activité. De plus, les preuves retenues et rejetées par les membres de chaque équipe sont directement dépendantes des types de preuves développées lorsque les élèves ont répondu à la question *Act2(Ind)-4* (par exemple, si aucun élève ne présente un calcul sur les énoncés lors du travail individuel, il est impossible que les élèves retiennent ou rejettent ce type de preuves lors du travail d'équipe). C'est pourquoi, dans ce cas-ci, il ne semble pas pertinent d'analyser le pourcentage d'élèves qui retiennent ou qui rejettent différents types de preuves. Cette section se concentre donc strictement sur les catégories de justifications qui émergent des commentaires des élèves de chacun des deux groupes lorsqu'ils expliquent les raisons qui les poussent à retenir ou à rejeter une solution.

4.5.1.1 Groupe contrôle

Le tableau LV (p. 215) présente les différents types d'arguments utilisés par les élèves du groupe contrôle pour retenir ou rejeter une solution soumise par l'un des membres de leur équipe.

Tableau LV. Fréquence et pourcentage de chaque type d'arguments utilisés par les élèves du groupe contrôle pour retenir ou rejeter une solution aux questions Act2(Eq)-4a et Act2(Eq)-4b

	Fréquence	%
Règles du débat mathématique	20	32
Argumentation	42	68
Total	62	100

Au total, les élèves du groupe contrôle présentent 62 commentaires qui concernent des solutions retenues ou rejetées. À travers 68 % de leurs commentaires, les élèves justifient leur choix en faisant référence à la clarté des explications ou à la facilité de compréhension de ces explications. Voici quelques exemples :

- « On les accepte tous, parce qu'ils sont tous bons. »
- « Parce que c'est bien expliqué et que ça démontre bien la réponse. »
- « Nous les acceptons toutes. Nous avons tous les mêmes réponses. »
- « On n'en a pas rejeté, car on a tous la même chose. »

Les élèves qui présentent les deux derniers commentaires ne semblent pas réaliser que le fait qu'ils aient tous la même réponse ne garantit aucunement la justesse de cette réponse. En effet, comme le précisent Arsac et al. (1992), une majorité n'est pas un critère suffisant pour s'assurer de la validité d'une proposition.

Enfin, en ce qui a trait aux règles du débat mathématique, une seule d'entre elles émerge des justifications des élèves du groupe contrôle, à savoir celle en lien avec les exemples. Cette règle entre en jeu dans 20 justifications (32 %). Parmi ces justifications, 18 enfreignent la règle qui précise que la présentation de quelques cas n'est pas suffisante pour prouver un énoncé. Tous ces élèves retiennent (ou ne rejettent pas) une ou plusieurs solutions qui ne contiennent que quelques exemples. Voici quelques justifications soumises par ces élèves :

- « Oui, car ça donne des nombres premiers à chaque calcul que j'ai fait, donc ça doit sûrement donner des nombres premiers avec d'autres nombres entiers naturels. »
- « Oui, car selon moi, il ne faudrait pas seulement avoir des petits chiffres, car quelqu'un qui voit ce problème peut penser que ça marche seulement avec les petits chiffres. »

Il est intéressant de remarquer que dans le dernier commentaire, l'élève retient la preuve présentée non seulement parce qu'elle contient des exemples, mais bien parce qu'elle consiste en une preuve dans laquelle apparaissent des exemples réalisés avec des entiers naturels « petits » et « grands ». Ce type de preuve représente une expérience cruciale.

Seuls deux élèves utilisent adéquatement la règle du débat mathématique en jeu. Dans les deux cas, ils rejettent une solution parce qu'elle présente seulement des exemples. Voici un des arguments soulevés par un élève : « celui de [*nom de l'élève*], parce qu'il avait donné sa réponse en faisant seulement 2 calculs ».

4.5.1.2 __Groupe expérimental (travail sur papier)__

Les élèves du groupe expérimental justifient leur choix de retenir ou de rejeter une solution à travers 46 commentaires (tableau LVI, p. 216).

Tableau LVI. Fréquence et pourcentage de chaque type d'arguments utilisés par les élèves du groupe expérimental pour retenir ou rejeter une solution aux questions Act2(Eq)-4a et Act2(Eq)-4b

	Fréquence	%
Règles du débat mathématique	5	11
Argumentation	41	89
Total	46	100

Parmi l'ensemble de ces commentaires, 41 (89 %) relèvent de la catégorie « Argumentation ». Dans 13 de ces 41 cas, les élèves ont recours à un argument d'autorité pour retenir une ou plusieurs solutions (ils retiennent toutes les solutions présentées par les membres de leur équipe, car essentiellement, ces solutions sont les mêmes : « on n'en rejette pas, puisque nous avions la même explication! »). Finalement, moins d'élèves du groupe expérimental que du groupe contrôle font appel à l'une des règles du débat mathématique dans leurs commentaires pour expliquer pourquoi ils retiennent ou rejettent une solution. Ce pourcentage est de 11 % chez le groupe expérimental et de 32 % chez le groupe contrôle. Il est envisageable de supposer que les traces dans le forum électronique amènent les élèves à moins expliciter leur pensée. En effet, pour éviter la redondance dans les messages, les élèves peuvent omettre d'écrire certains détails déjà précisés en ligne (que ce soit dans le message d'un autre élève ou dans un message qu'ils ont préalablement écrit). Ils adopteraient alors le même comportement sur papier.

Tandis qu'une seule règle est utilisée par les élèves du groupe contrôle (règle des exemples), deux règles ressortent des commentaires des élèves du groupe expérimental, soit celle associée au contre-exemple et celle liée aux propriétés mathématiques. De plus, bien que les règles du débat mathématique soient mobilisées moins souvent par les élèves du groupe expérimental que par les élèves du groupe contrôle, lorsque les élèves du groupe expérimental font appel à une telle règle, ils l'utilisent toujours adéquatement (contrairement aux élèves du groupe contrôle, qui enfreignent une règle 18 fois sur 20). Chez le groupe expérimental, les élèves utilisent adéquatement la règle qui concerne l'utilisation de propriétés mathématiques quatre fois sur cinq. Ils placent alors l'importance sur les explications présentées, ces dernières étant basées sur certaines propriétés mathématiques. Par exemple, un élève fournit cette explication : « celui de [*nom de l'élève*], car ses explications des priorités des opérations ont du sens ». La règle du débat mathématique qui concerne l'utilisation d'un unique contre-exemple pour invalider un énoncé est mobilisée de façon juste par un des cinq élèves. Cet élève rejette tout simplement une des solutions parce qu'elle ne présente aucun contre-exemple. Rappelons que chez le groupe contrôle, seule la règle qui précise que quelques exemples ne suffisent pas pour prouver est mobilisée par les élèves. Les élèves du groupe expérimental ne se servent aucunement de cette règle dans leurs justifications.

4.5.1.3 Groupe expérimental (travail dans le forum électronique)

Dans le cadre de cette activité, après avoir échangé en salle de classe, les élèves se rendent dans le forum électronique afin de poursuivre la discussion. Le message publié en ligne contient deux questions. La première touche le développement de preuves tandis que la deuxième, qui nous intéresse ici, invite les élèves à commenter les preuves soumises par leurs pairs. Les types de messages publiés dans le forum électronique et touchant l'évaluation d'une preuve sont présentés au tableau LVII (p. 218).

Tableau LVII. Fréquence de chaque type d'arguments utilisés par les élèves du groupe expérimental pour évaluer une preuve à la question Act2(f)-4b dans le forum électronique[113]

	Fréquence
Argumentation	13
Règles du débat mathématique	9
Total	22

Treize fois sur vingt-deux, les élèves utilisent l'argumentation pour justifier leur choix. Dans onze cas, ils corrigent certains éléments d'un message ou jugent qu'un message n'est pas suffisamment clair et demandent des précisions. Par exemple, des élèves écrivent :

- « As-tu fait ton travail pour nous démontrer que la réponse est fausse? »
- « Explique-moi comment tu arrives à 25?!!! »

Les deux autres élèves qui utilisent l'argumentation expliquent qu'ils ont trouvé la même réponse que celle présentée, ce qui les mène à donner raison à l'auteur du message. Enfin, parmi les 22 messages dans lesquels les élèves évaluent une preuve, neuf présentent la règle associée au contre-exemple ou celle liée à l'utilisation de propriétés mathématiques. La justesse avec laquelle les élèves du groupe expérimental utilisent ces règles est mise en évidence dans le tableau LVIII (p. 218).

Tableau LVIII. Fréquence des justifications des élèves du groupe expérimental qui présentent un usage adéquat ou qui enfreignent une règle du débat mathématique lorsqu'ils retiennent ou rejettent une solution aux questions Act2(f)-4a et Act2(f)-4b dans le forum électronique et taux d'efficacité de chaque règle (n = 9)

	Propriétés mathématiques		Contre-exemple	
	Usage adéquat	Taux d'efficacité	Usage adéquat	Taux d'efficacité
Solution retenue	1	1/1	3	3/3
Solution rejetée	0	s/o	5	5/5
Total	1	1/1	8	8/8

Tout comme c'était le cas lors du travail sur papier, les élèves du groupe expérimental font toujours un usage adéquat des règles du débat mathématique lorsqu'ils

[113] Étant donné que ce tableau a trait aux arguments utilisés par les élèves pour évaluer une preuve, les messages dans lesquels les élèves se contentent d'indiquer s'ils sont d'accord ou non avec un message publié en ligne ne sont pas comptabilisés.

échangent dans le forum électronique. Une comparaison des commentaires émis sur papier et des commentaires publiés en ligne permet toutefois de remarquer que le taux de commentaires lié à chacune des deux règles en jeu est pratiquement inversé. En effet, lors du travail sur papier, quatre élèves sur cinq utilisaient la règle qui touche les propriétés mathématiques tandis qu'un élève sur cinq faisait usage de la règle qui concerne le contre-exemple. Dans le forum électronique, ces rapports sont respectivement de 1/9 et 8/9. L'élève qui fait appel aux propriétés mathématiques explique pourquoi 121 n'est pas un nombre premier. Il s'appuie donc sur la définition d'un nombre premier pour exposer son point de vue et donner raison à un autre élève qui présente un contre-exemple dans son message. Dans les huit autres cas, les élèves soulignent la présence d'un contre-exemple. Parmi ces élèves, trois attirent l'attention sur la présence d'un contre-exemple présenté par un autre élève pour lui donner raison, alors que cinq indiquent leur désaccord avec un élève qui prétend que tous les nombres obtenus seront premiers. Ils tentent de convaincre l'autre élève qu'ils ont raison en mentionnant la présence d'un contre-exemple ou en présentant ce contre-exemple. Notons que le terme « contre-exemple » n'est pas utilisé par les élèves du groupe expérimental lorsqu'ils échangent dans le forum électronique. Certains précisent tout simplement que « si tu remplaces *n* par 11, ça ne donne pas un nombre premier » ou encore « [qu']il y a une exception pour sûr qui est le numéro 11 ». Un élève réagit à ce dernier commentaire en soulevant l'importance du contre-exemple qui, à ses yeux, dépasse la simple exception (figure 59, p. 219).

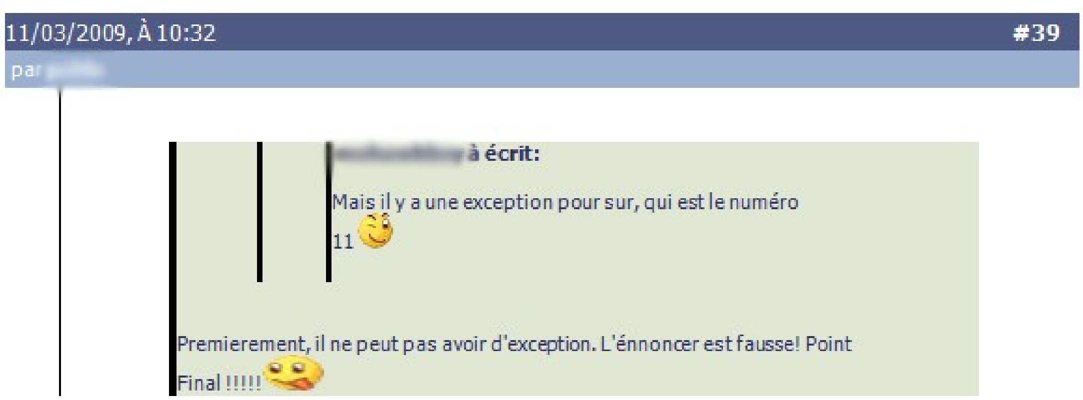


Figure 59. Valeur du contre-exemple à la question Act2(f)-4b dans le forum électronique.

Dans le cas de cet élève, les règles de la logique naturelle ne semblent pas faire obstacle aux règles de la logique formelle. En effet, il reconnaît qu'en mathématiques, un exemple qui ne répond pas à un énoncé est considéré comme un contre-exemple qui invalide cet énoncé et non comme une simple exception qui échappe à la règle, sans pour autant remettre en question ledit énoncé.

4.5.1.4 Observations générales à la suite de l'analyse des résultats des questions Act2(Eq)-4a et Act2(Eq)-4b

La majorité des élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental utilisent l'argumentation pour appuyer leur choix. Le pourcentage des solutions des élèves qui présentent une telle justification est toutefois plus élevé chez le groupe expérimental (89 %) que chez le groupe contrôle (68 %). Ce pourcentage diminue à 9 % lorsque les élèves du groupe expérimental commentent les messages dans le forum électronique. Sans pouvoir dire s'il s'agit d'un effet du forum, l'observation demeure intéressante. En ce qui a trait aux règles du débat mathématique, les élèves du groupe contrôle, comparativement aux élèves du groupe expérimental, présentent presque trois fois plus de justifications où ces règles sont mobilisées (le pourcentage s'élève à 32 % chez le groupe contrôle alors qu'il n'est que de 11 % chez le groupe expérimental). Les élèves du groupe expérimental utilisent toutefois toujours les règles du débat mathématique de façon adéquate, alors que dans le groupe contrôle, seuls deux solutions sur 20 présente un usage adéquat de l'une des règles.

À l'instar du travail réalisé sur papier par les élèves du groupe expérimental, tous les commentaires publiés en ligne présentent aussi un usage adéquat d'une des règles. Par ailleurs, la dynamique des échanges qui ont lieu dans le forum électronique semble représenter un levier pour l'usage des règles du débat mathématique. En effet, dans le forum électronique, les élèves tiennent à convaincre leurs pairs qu'ils ont raison. Étant donné que l'argumentation représente un moyen plus ou moins efficace pour convaincre (même s'il est utilisé par un certain nombre d'élèves), les élèves semblent davantage se tourner vers l'utilisation de règles du débat mathématique. De plus, les élèves qui participent aux échanges dans l'outil de communication en ligne sont exposés à un plus grand nombre de justifications que les élèves qui travaillent seulement en équipe en salle de classe. Cette exposition à une diversité d'explications qui font appel aux règles peut possiblement enrichir les connaissances des élèves en ce qui à trait aux habiletés de validation algébriques.

4.5.2 Preuves retenues et rejetées par les élèves pendant l'enseignement (Act2(Eq)-5a et Act2(Eq)-5b)

La deuxième activité comprend un autre problème qui amène les élèves à développer une preuve puis à évaluer les preuves produites par les autres. Dans ce deuxième problème, les élèves doivent d'abord, pendant le travail individuel (*Act2(Ind)-5*), déterminer si tous les nombres entiers divisibles par 10 sont divisibles par 5. Ils doivent ensuite, en équipe, évaluer les preuves proposées par les membres de leur équipe et indiquer lesquelles ils retiennent (*Act2(Eq)-5a*) et lesquelles ils rejettent (*Act2(Eq)-5a*). Étant donné que l'ensemble des preuves développées par les élèves se trouve à être évalué, cette section se limite, comme la précédente, à présenter les types d'arguments utilisés par les élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental pour justifier leur choix de retenir ou de rejeter une preuve.

4.5.2.1 Groupe contrôle

Lorsque les élèves identifient les solutions des membres de leur équipe qu'ils désirent retenir ou rejeter, ils présentent différents arguments pour appuyer leurs choix. Dans l'ensemble, les élèves du groupe contrôle présentent 29 justifications aux questions *Act2(Eq)-5a* et *Act2(Eq)-5b* (tableau LIX, p. 221).

Tableau LIX. Fréquence de chaque type d'arguments utilisés par les élèves du groupe contrôle pour retenir ou rejeter une solution aux questions Act2(Eq)-5a et Act2(Eq)-5b

	Fréquence
Règles du débat mathématique	8
Argumentation	21
Total	29

Parmi ces 29 justifications, 21 sont associées à l'argumentation. Parmi l'ensemble des justifications qui relève de l'argumentation, 10 reposent sur le fait que tous les membres de l'équipe ont trouvé la même réponse. Finalement, huit justifications sur 29 font appel à la règle qui porte sur les propriétés mathématiques ou à celle en lien avec l'utilisation d'exemples.

L'ensemble des justifications des élèves qui touchent une règle du débat mathématique visent à retenir une solution. Sept des huit justifications enfreignent la règle qui a trait aux exemples. Dans tous les cas, ces élèves s'appuient sur les exemples présentés dans une solution pour la retenir : « celui de [*nom de l'élève*], [*nom de l'élève*] et le mien, parce qu'on a fait des exemples ». Seulement une des justifications présentées par les élèves du groupe contrôle présente une utilisation adéquate d'une règle, plus précisément la règle des propriétés mathématiques. L'élève précise que les membres de son équipe ont raison, car « 10 est divisible par 5, donc ça peut se faire ». Il ne mentionne pas explicitement qu'une preuve doit être basée sur des propriétés mathématiques, mais il reprend l'élément clé des solutions soumises par les membres de son équipe et s'appuie sur le fait que les expériences mentales présentées par ses pairs permettent de voir que tous les nombres divisibles par 10 sont divisibles par 5.

4.5.2.2 <u>Groupe expérimental (travail sur papier)</u>

Dans l'ensemble, 43 justifications sont soumises par les élèves du groupe expérimental aux questions *Act2(Eq)-5a* et *Act2(Eq)-5b* (tableau LX, p. 222).

Tableau LX. Fréquence et pourcentage de chaque type d'arguments utilisés par les élèves du groupe expérimental pour retenir ou rejeter une solution aux questions Act2(Eq)-5a et Act2(Eq)-5b

	Fréquence	%
Règles du débat mathématique	7	16
Argumentation	36	84
Total	43	100

La majorité des justifications (84 %) se retrouvent dans la catégorie « Argumentation » (par exemple, les élèves se basent sur le fait que tous les membres de leur équipe ont trouvé la même réponse pour retenir une solution). Toutes les autres justifications (7 sur 43) font référence, d'une façon ou d'une autre, à la règle sur les propriétés mathématiques ou à celle sur l'utilisation d'exemples. Notons que les mêmes règles émergent des justifications des élèves du groupe contrôle. Le tableau LXI (p. 223) présente les détails de l'usage des règles par les élèves du groupe expérimental.

Tableau LXI. Fréquence des justifications des élèves du groupe expérimental qui présentent un usage adéquat ou qui enfreignent une règle du débat mathématique lorsqu'ils retiennent ou rejettent une solution aux questions Act2(Eq)-5a et Act2(Eq)-5b et taux d'efficacité de chaque règle (n = 7)

	Propriétés mathématiques			Exemples		
	Usage adéquat	Règle enfreinte	Taux d'efficacité	Usage adéquat	Règle enfreinte	Taux d'efficacité
Solution retenue	3	0	3/3	0	2	0/2
Solution rejetée	0	2	0/2	0	0	s/o
Total	3	2	3/5	0	2	0/2

Les trois élèves du groupe expérimental qui présentent un usage adéquat de la règle sur les propriétés mathématiques font référence, dans leur justification, aux éléments de la preuve qui leur permettent de généraliser. Par exemple, un élève explique son choix de la façon suivante : « nous retenons celle qui veut dire : 5 est la moitié de 10, donc n'importe quel nombre divisible par 10 est aussi divisible par 5 ». Les deux élèves qui enfreignent cette règle reprochent à certaines solutions de ne pas présenter d'exemples. Or, il n'est point nécessaire pour une preuve de contenir des exemples. Ces élèves ne réalisent donc pas que l'utilisation de propriétés mathématiques est suffisante pour prouver et que des exemples n'ont pas à être ajoutés à la solution. Dans les deux cas, la justification donnée par les élèves est sensiblement la même, soit que la solution concernée est rejetée, « car il n'y a pas assez d'information et il n'y a pas d'exemples ». Enfin, les deux élèves du groupe expérimental qui, à travers leur commentaire, enfreignent la deuxième règle en jeu (quelques exemples ne suffisent pas à prouver) précisent qu'ils conservent une solution parce qu'elle contient plusieurs exemples.

4.5.2.3 Groupe expérimental (travail dans le forum électronique)

Cette activité amène également les élèves du groupe expérimental à prendre position sur les preuves présentées par leurs pairs dans le forum électronique. Les différentes formes que prend l'évaluation faite par les élèves du groupe expérimental alors qu'ils échangent en ligne sont mises en évidence dans le tableau LXII (p. 224).

Tableau LXII. Fréquence de chaque type d'arguments utilisés par les élèves du groupe expérimental pour évaluer une preuve à la question Act2(f)-5b dans le forum électronique[114]

	Fréquence
Règles du débat mathématique	2
Argumentation	4
Total	6

Parmi l'ensemble des messages écrits dans le forum électronique par les élèves du groupe expérimental lorsqu'ils répondent à la question *Act2(f)-5b,* six messages visent à évaluer une preuve et quatre d'entre eux démontre une forme d'argumentation. Par exemple, un élève félicite son collègue parce qu'il a trouvé la même réponse que lui. Dans le cours de l'échange en ligne, un des enseignants du groupe expérimental, dont le message n'est pas comptabilisé dans le tableau ci-dessus, demande des précisions lors de cet échange. Il remet en question les solutions des élèves basées sur l'empirisme naïf en soulevant certains éléments propres aux règles du débat mathématique (figure 60, p. 224).

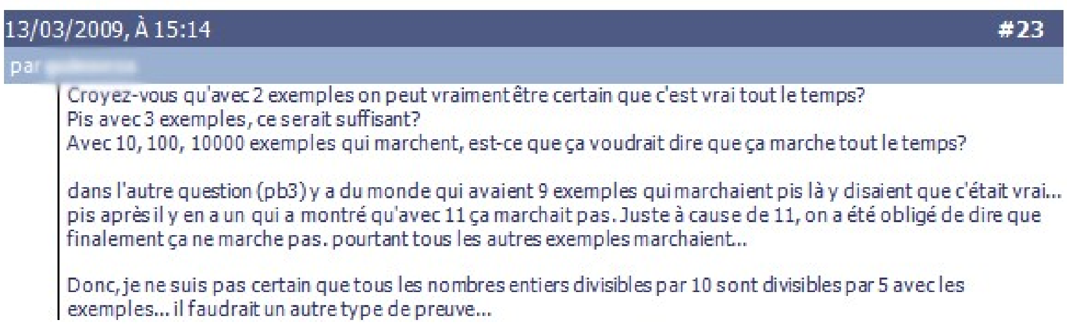


Figure 60. Message de l'enseignant à la question Act2(f)-5b dans le forum électronique

Il fait référence à l'existence d'un contre-exemple lors de la résolution d'un autre problème (en lien avec l'expression $n \times n - n + 11$), contre-exemple qui permet d'invalider l'énoncé. Il mentionne également le fait que quelques exemples ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé est vrai. Puisque son message est l'un des derniers de la discussion, il semble peu avoir influencé les élèves.

Dû à des problèmes techniques, les élèves du groupe expérimental n'ont pas pu échanger dans le forum électronique lors de la première activité. Par conséquent, le travail

[114] Étant donné que ce tableau a trait aux arguments utilisés par les élèves pour évaluer une preuve, les messages dans lesquels les élèves se contentent d'indiquer s'ils sont d'accord ou non avec un message publié en ligne ne sont pas comptabilisés.

réalisé dans l'outil de communication à cette étape de l'expérimentation (*Act2(f)-4* et *Act2(f)-5*) représente la première occasion d'échanges en ligne. À la suite de l'analyse des messages découlant des questions *Act2(f)-5a* et *Act2(f)-5b*, il paraît évident que les élèves sont peu outillés pour débattre à l'écrit. Bien que plusieurs d'entre eux présentent une preuve ou évaluent celles des autres, leurs messages comportent peu d'information et demeurent souvent superficiels. Des résultats semblables sont observés par Maurino (2007), alors qu'il remarque qu'il est courant de lire des messages en ligne qui se limitent à une ou deux lignes et qui ne cherchent qu'à démontrer un accord pour un message précédemment écrit. Par ailleurs, Ocker et Yaverbaum (1999, 2001) remarquent que les messages échangés en ligne sont moins profonds que ceux échangés en personne. C'est pourquoi des lignes guides pour aider les élèves à débattre dans le forum électronique leur sont remises sur papier après cette activité (annexe 28, p. 392).

4.5.2.4 Observations générales à la suite de l'analyse des résultats des questions Act2(Eq)-5a et Act2(Eq)-5b

Encore une fois, ce sont les justifications qui présentent une forme d'argumentation qui sont les plus présentes dans les productions des élèves. De plus, comme c'était le cas pour les questions *Act2(Eq)-4a* et *Act2(Eq)-4b* (expression $n \times n - n + 11$), les résultats obtenus aux questions *Act2(Eq)-5a* et *Act2(Eq)-5b* mettent en évidence le fait que les élèves du groupe contrôle (8/29), dans leurs justifications, utilisent davantage les règles du débat mathématique que les élèves du groupe expérimental (7/43). Dans ce cas-ci, les échanges dans le forum électronique ne suscitent pas l'utilisation des règles du débat mathématique par les élèves du groupe expérimental. Malgré cela, sur papier, le taux d'élèves qui utilisent ces règles de façon adéquate dans leurs justifications est un peu plus élevé chez le groupe expérimental (3/7) que chez le groupe contrôle (1/8). Évidemment, le nombre peu élevé d'élèves qui mobilisent les règles du débat dans leurs justifications nous amène à tirer nos conclusions avec prudence.

4.5.3 Choix (Act3(Ind)-6a) et justifications des élèves (Act3(Ind)-6b) pendant l'enseignement

Dans le cadre de la troisième activité, une nouvelle tâche est proposée aux élèves. À la question *Act3(Ind)-6a*, l'énoncé mathématique suivant leur est présenté : *Quels que* *soient les deux nombres strictement positifs que je choisis, leur produit est toujours supérieur ou égal à chacun des deux nombres*. Plutôt que d'avoir à valider ou à invalider cet énoncé, les élèves doivent identifier, parmi deux preuves d'élèves fictifs (Pierre et Paul), qui a tort et qui a raison. Rappelons les solutions de ces deux élèves :

- Pierre répond : « cette phrase est vraie, car :
  Si je prends 3 et 2, le produit est 6 et 6 > 3 et 6 > 2.
  Si je prends 1,3 et 5, le produit est 6,5 et 6,5 > 1,3 et 6,5 > 5.
  Si je prends 4,8 et 150, le produit est 720, il est plus grand que 4,8 et 150.
  Si je prends 11,2 et 4, le produit est 44,8, il est plus grand que 3,4 et 6.
  Tu vois, le produit est toujours plus grand que les nombres que j'ai choisis au départ, donc la phrase est vraie. »

- Paul répond : « cette phrase est fausse, car :
  Si je prends 4 et 0,3, le produit est égal à 1,2 et 1,2 < 4. »

Un de ces élèves (Pierre) confirme l'énoncé en présentant quatre exemples alors que l'autre (Paul) l'infirme à l'aide d'un contre-exemple. Les élèves peuvent décider que l'un des deux élèves fictifs a raison et que l'autre a tort, que les deux ont raison ou que les deux ont tort. Selon l'une des règles du débat mathématique, un énoncé mathématique est soit vrai soit faux. Les deux élèves fictifs ne peuvent donc pas avoir raison, puisqu'ils se contredisent. Étant donné que Paul présente un contre-exemple correct, c'est lui qui a raison et, par conséquent, Pierre a tort. Le tableau LXIII (p. 226) présente le choix de réponse fait par les élèves de chacun des deux groupes.

Tableau LXIII. Fréquence et pourcentage d'élèves de chacun des deux groupes qui optent pour chaque choix de réponses à la question Act3(Ind)-6a

	Groupe contrôle		Groupe expérimental	
	Fréquence	%	Fréquence	%
Aucune réponse	1	2	1	2
Pierre a raison et Paul a tort	5	9	7	15
Paul a raison et Pierre a tort (réponse correcte)	21	37	27	57
Ni Paul ni Pierre n'ont raison	2	3	4	9
Pierre et Paul ont raison tous les deux	26	46	8	17
Pierre et Paul ont raison (ne correspond pas à la justification) [115]	2	3	0	0
Total	57	100	47	100

[115] Deux élèves cochent un choix de réponse, mais présentent une justification qui ne correspond pas à leur choix. Par exemple, à la question *Act3(Ind)-6a*, un élève coche « Paul a raison et Pierre a tort ». Cependant, à la question suivante (*Act3(Ind)-6b*), il précise que « Pierre et Paul ont raison, parce que des fois le produit est plus grand que ou égal. Des fois le produit est plus petit ».

Dans l'ensemble, deux réponses sont choisies par plus d'élèves que les autres, soit la bonne réponse qui précise que Paul a raison et que Pierre a tort, ainsi que la réponse « Pierre et Paul ont raison tous les deux ». Un regard plus précis sur les résultats de chacun des groupes nous permet de constater que chez le groupe contrôle, ces deux réponses sont sélectionnées par presque le même pourcentage d'élèves. Cependant, il demeure que c'est la réponse « Pierre et Paul ont raison tous les deux » qui est choisie par le plus grand nombre d'élèves. Chez le groupe expérimental, la bonne réponse est identifiée par la majorité des élèves (57 %). La réponse selon laquelle Pierre et Paul ont tous les deux raison arrive loin derrière, alors que 17 % des élèves font ce choix. Les deux prochaines sections présentent une analyse plus approfondie des raisons qui poussent les élèves des deux groupes à faire un choix plutôt qu'un autre.

4.5.3.1 <u>Groupe contrôle</u>

Cinquante-sept élèves du groupe contrôle ont répondu à la question. Au total, 46 % des élèves affirment que Pierre et Paul ont raison alors que 37 % concluent que Pierre a raison, mais que Paul a tort (tableau LXIV, p. 227). Par conséquent, 26 élèves (46 %) ne se conforment pas à la règle du tiers exclu.

Tableau LXIV. Fréquence et pourcentage d'élèves du groupe contrôle qui optent pour chaque choix de réponses à la question Act3(Ind)-6a

	Fréquence	%
Aucune réponse	1	2
Pierre a raison et Paul a tort	5	9
Paul a raison et Pierre a tort (réponse correcte)	21	37
Ni Paul ni Pierre n'ont raison	2	3
Pierre et Paul ont raison tous les deux	26	46
Pierre et Paul ont raison (ne correspond pas à la justification)	2	3
Total	57	100

Dans certains cas, les élèves se limitent à indiquer qui a raison ou qui a tort, alors que dans d'autres cas, ils expliquent de façon plus explicite la raison de leur choix. Les justifications soumises par les élèves du groupe contrôle prennent différentes formes et elles peuvent parfois être associées aux règles du débat mathématique. Au total, 74 justifications sont générées dans les commentaires des élèves du groupe contrôle. Vingt-et-une d'entre elles sont d'ordre général et ne peuvent pas être associées à l'une des règles du débat mathématique. Les commentaires qui restent touchent quatre règles du débat mathématique, soit celles en lien avec le tiers exclu, le contre-exemple, les propriétés mathématiques et les exemples (tableau LXV, p. 228).

Tableau LXV. Fréquence et pourcentage des justifications des élèves du groupe contrôle qui présentent une utilisation adéquate ou qui enfreignent une règle du débat mathématique à la question Act3(Ind)-6a et taux d'efficacité de chaque règle (n = 54)[116]

	Usage adéquat		Règle enfreinte		
	Fréquence	%	Fréquence	%	Taux d'efficacité
Tiers exclu	0	0	25	46	0/25
Contre-exemple	9	17	3	5	9/12
Propriétés mathématiques	7	13	0	0	7/7
Exemples	1	2	9	17	1/10
Total	17	32	37	68	17/54

Il est possible d'observer que, dans l'ensemble, les règles du débat mathématique sont plus souvent enfreintes qu'utilisées adéquatement par les élèves du groupe contrôle. En effet, dans 68 % des cas, une des quatre règles concernées est enfreinte alors que ce n'est que dans 32 % des cas que les élèves réussissent à utiliser adéquatement l'une de ces règles. Voyons un peu plus en détail les justifications soumises par les élèves.

Dans neuf justifications (17 %), les élèves associent explicitement la production de Paul à un contre-exemple et font aussi un usage adéquat de cette règle. Le contre-exemple n'invalide toutefois pas toujours la même chose. Certains élèves précisent que l'exemple donné par Paul contredit l'énoncé, ce qui les amène à conclure que Paul à raison. D'autres donnent raison à Paul pour la simple et unique raison qu'il contredit ce que Pierre dit.

- « Il n'y a que Paul qui a raison, car il a trouvé une réponse qui contredit l'énoncé. »
- « Paul a raison, car il a trouvé une équation qui convient au contraire de ce que Pierre a dit. »

La deuxième règle utilisée adéquatement dans le plus grand nombre de justifications, soit sept sur 17 (13 %), touche les propriétés mathématiques ou les définitions sur lesquelles les élèves du groupe contrôle s'appuient pour prouver la véracité d'un énoncé. Par exemple, un élève précise que : « quand c'est multiplié par un chiffre inférieur à 1 (ex : 0,1; 0,2…), c'est plus petit ».

[116] Les pourcentages présentés dans ce tableau sont calculés en fonction du nombre de justifications faisant appel à une des règles du débat mathématique et non en fonction du nombre total de justifications.

Les vingt-cinq commentaires (46 %) des élèves du groupe contrôle touchant la règle du tiers exclu sont associés au non-respect de cette règle, car tous ces élèves soulèvent dans leur commentaire que Pierre et Paul ont raison. Pour ces élèves, il n'est pas clair qu'un contre-exemple suffit pour invalider un énoncé mathématique. Quelques élèves réalisent que l'énoncé n'est pas toujours vrai, mais ils ne sont pourtant pas prêts à l'invalider. Ils répondent donc que Pierre et Paul ont raison et donnent des raisons semblables à celles ci-dessous pour expliquer leur choix :

- « Bien si tu fais 5 × 0,5, ta réponse va être plus petite que 5. Moi, je dis que ça dépend des chiffres que tu prends. »
- « Paul a aussi raison, car 0,1 à 0,9, ce sont des nombres positifs aussi, mais ils sont moins que 1. Pierre a raison, mais il faut que le chiffre positif soit 1 et plus. Car peut-être qu'une personne a tout simplement une autre manière de penser, donc il faut que j'essaie d'être en faveur avec le côté tort et le côté de raison. C'est pourquoi j'ai dit que les deux ont raison. »

Dans ce dernier commentaire, il est également possible d'observer que certains élèves, à travers leur justification, portent une attention particulière au fait que les solutions proposées par les deux garçons se complètent. Voici un autre exemple de justification qui reflète une telle interprétation des résultats : « Pierre a choisi des nombres plus grands que Paul pour effectuer son explication. Les deux sont vrais. ».

La deuxième règle la plus enfreinte par les élèves lors de l'explication de leur choix est celle des exemples. Lors de cette activité, dans neuf commentaires sur 17 (17 %), les élèves ne font que vérifier l'exactitude des calculs présentés par Pierre et Paul. Comme les exemples des solutions ne contiennent aucune erreur, elles sont considérées comme étant correctes. Or, dans ce cas-ci, une telle analyse des preuves de Pierre et Paul amène les élèves à tirer une conclusion erronée, soit qu'ils ont tous les deux raison. Ils oublient le contexte du problème, qui repose sur la validation ou l'invalidation de l'énoncé. Par conséquent, la solution de Pierre, qui ne présente que quelques exemples, est validée par les élèves. Ces derniers considèrent donc que quelques exemples sont suffisants pour prouver. En faisant abstraction de la question qui leur est posée, les élèves enfreignent la règle des exemples. De plus, leur raisonnement les pousse à conclure que les deux élèves ont raison, ce qui va à l'encontre de la règle du tiers exclu. Voici quelques exemples de justifications données par les élèves :

- « Les exemples de Pierre étaient tous bien et il a raison, mais les exemples de Paul étaient aussi bien donc les deux sont bien. »
- « Ils ont tous les deux raison car les énoncés qu'ils ont montrés sont tous les deux corrects. »
- « Les deux arguments font du sens. On pourrait se baser sur les deux, par rapport aux calculs les deux font du sens. »
- « Les deux ont raison, car la phrase n'est pas vraiment vraie ou fausse. Je suis convaincue grâce à des exemples. »

4.5.3.2 Groupe expérimental

Au total, 47 élèves du groupe expérimental ont répondu à la question *Act3(Ind)-6a*. Contrairement à ce qui peut être observé chez le groupe contrôle, les élèves du groupe expérimental font majoritairement le bon choix de réponse (57 %) (tableau LXVI, p. 230).

Tableau LXVI. Fréquence et pourcentage d'élèves du groupe expérimental qui optent pour chaque choix de réponses à la question Act3(Ind)-6a

	Fréquence	%
Aucune réponse	1	2
Pierre a raison et Paul a tort	7	15
Paul a raison et Pierre a tort (réponse correcte)	27	57
Ni Paul ni Pierre n'ont raison	4	9
Pierre et Paul ont raison tous les deux	8	17
Total	47	100

Les deux autres choix de réponses les plus populaires, loin derrière, sont que Pierre et Paul ont raison tous les deux (17 %) et que Pierre a raison et Paul a tort (15 %). Seuls quatre élèves (9 %) disent qu'aucun des garçons n'a raison. Ainsi, les élèves du groupe expérimental répondent correctement à cette question dans un plus grand pourcentage que ceux du groupe contrôle (les pourcentages sont respectivement de 57 % et 37 %).

Au total, 54 justifications sont générées dans les commentaires des élèves du groupe expérimental. Parmi ces 54 justifications, 20 sont d'ordre général et ne peuvent être associées à une des règles du débat mathématique. Dans tous les autres cas, les justifications sont associées à une des règles du débat mathématique en lien avec le tiers exclu, le contre-exemple, les propriétés mathématiques ou les exemples. Le tableau LXVII (p. 231) met en évidence la fréquence des justifications des élèves qui utilisent adéquatement ou qui enfreignent l'une de ces règles ainsi que le taux d'efficacité associé à chaque règle.

Tableau LXVII. Fréquence des justifications des élèves du groupe expérimental qui présentent une utilisation adéquate ou qui enfreignent une règle du débat mathématique à la question Act3(Ind)-6a et taux d'efficacité de chaque règle (n = 34)

	Usage adéquat	Règle enfreinte	Taux d'efficacité
Tiers exclu	0	9	0/9
Contre-exemple	14	0	14/14
Propriétés mathématiques	9	0	9/9
Exemples	0	2	0/2
Total	23	11	23/34

La comparaison des résultats des groupes contrôle et expérimental en ce qui à trait à l'utilisation des règles du débat mathématique permet de remarquer que les fractions associées à l'usage adéquat ou non adéquat d'une règle sont inversées dans les deux groupes. En effet, parmi les 54 justifications des élèves du groupe contrôle, 17 présentent un usage adéquat de l'une ou l'autre des règles du débat mathématique (une règle est donc enfreinte 37 fois sur 54). Chez les élèves du groupe expérimental, la fraction d'usages adéquats est de 23 sur 34. Les élèves du groupe expérimental démontrent donc une plus grande aisance à mobiliser adéquatement les règles du débat mathématique que les élèves du groupe contrôle. Ainsi, nous pouvons penser que le forum électronique représente un environnement qui, par sa nature, amène les élèves à prendre conscience de certains phénomènes (par exemple, le fait qu'un contre-exemple suffise pour invalider un énoncé) et par le fait même les amène à éviter d'enfreindre certaines règles du débat mathématique (dans ce cas, la règle du tiers exclu).

Les élèves du groupe expérimental utilisent adéquatement deux règles du débat mathématique. Dans un premier temps, le choix des élèves repose sur la puissance mathématique du contre-exemple. Dans quatorze messages, ils reconnaissent que la présence d'un simple contre-exemple suffit pour invalider l'énoncé. Ainsi, alors que les élèves du groupe contrôle qui font un bon choix de réponse s'appuient surtout sur l'exactitude des calculs de Pierre, l'idée du contre-exemple apparaît de façon plus importante dans les éléments soulevés par les élèves du groupe expérimental. Il est également intéressant de remarquer que chez les élèves du groupe expérimental, certains insistent sur le fait qu'un seul contre-exemple est nécessaire pour invalider un énoncé. Voici quelques exemples de justifications données par ces élèves :

- « Si 4 × 0,3 est égal à 1,2 et 1,2 est plus petit que 4 et bien ça prouve que l'affirmation est fausse. »
- « Paul a raison et Pierre a tort parce que si une manière ne fonctionne pas, cela est faux. »
- « Paul a raison, car une théorie est vraie jusqu'à ce qu'il y ait une chose qui la contredise. Comme si je dis que les nombres premiers sont tous impairs, ce qui est faux, car deux c'est pair et il est premier. Paul lui écrit une information qui est vraie et qui contredit ce que Pierre a dit. »
- « Ma réponse est bonne, car il a suffi d'un exemple pour détruire cette hypothèse. »

Dans un deuxième temps, neuf commentaires s'appuient sur des propriétés mathématiques pour expliquer les raisons pour lesquelles le produit obtenu n'est pas toujours supérieur ou égal aux nombres de départ. Les élèves semblent toutefois avoir de la difficulté à utiliser les bons termes lorsqu'ils parlent de nombres entiers, de nombres décimaux, de nombres décimaux inférieurs à 1, etc. Pour certains, les nombres décimaux, qu'ils appellent aussi nombres à virgule, sont inférieurs à 1. Ils disent donc que Paul utilise un nombre décimal dans ses calculs, alors que leurs réponses laissent supposer que Pierre ne le fait pas, ce qui est faux. Tous les exemples donnés par Pierre contiennent des nombres décimaux. Voici quelques justifications avancées par les élèves :

- « Paul a raison, car 4 et 0,3 = 1,2 et 1,2 < 4 et la question n'a pas dit qu'il ne pouvait pas y avoir de nombres à virgule. »
- « C'est parce que les nombres à virgule sont plus petits que 1 et ça veut dire que ça réduit le nombre. Le nombre doit avoir un 0 devant. »
- « Si on utilisait des nombres à virgule, ça donne un nombre plus petit et des nombres avec pas de virgule donnent un nombre plus grand. »

De telles explications de la part des élèves, bien qu'elles ne soient pas mathématiquement correctes, nous permettent tout de même de comprendre le raisonnement des élèves. Leur lacune ne se situe pas autant au niveau de la compréhension des concepts mathématiques en jeu qu'au niveau de la communication à l'aide du langage mathématique. En effet, plusieurs de ces affirmations reflètent un certain souci de la part des élèves de vouloir expliquer pourquoi le produit obtenu est inférieur aux deux nombres multipliés. C'est la principale raison pour laquelle ils font appel aux nombres décimaux dans leur justification. L'élève ci-dessous trouve une meilleure façon d'expliquer ce qui se passe lors de la multiplication des nombres (en prenant en compte que l'énoncé précise que les nombres doivent être strictement positifs) :

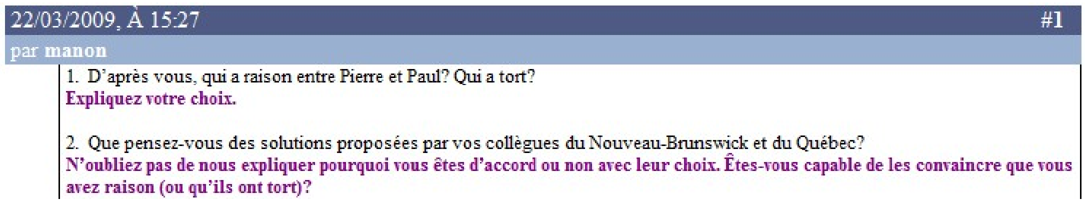
- « Tout nombre plus bas que 1 multiplié avec un autre nombre égal un produit plus petit. $0,5 \times 1 = 0,5$. Paul a raison et Pierre à tort, car $0,5 < 1$. »

Enfin, neuf commentaires sur 34 ne se conforment pas à la règle du tiers exclu. Tout comme les élèves du groupe contrôle qui répondent que Pierre et Paul ont tous les deux raison, les élèves du groupe expérimental qui font ce même choix se limitent à valider les calculs réalisés par les deux garçons. C'est pourquoi ils leur donnent pareillement raison, même si les conclusions tirées s'opposent. Cela concorde avec les résultats obtenus par Arsac et al. (1992) qui précisent que « pour une part importante d'élèves […], une phrase mathématique peut être à la fois vraie et fausse » (p. 136). De plus, il est possible d'observer que la valeur du contre-exemple en mathématique n'est pas entièrement reconnue par ces élèves. En effet, ils admettent que l'énoncé n'est pas toujours vrai, mais cela ne leur suffit pas pour l'invalider. Un élève va même jusqu'à préciser que Paul ne donne pas assez d'explications, ce qui le pousse à rejeter sa solution. Cet élève ne comprend alors pas la valeur du contre-exemple. Enfin, les élèves qui ne se basent que sur la justesse des calculs présentés pour tirer leur conclusion ne se conforment pas à la règle associée à l'utilisation d'exemples.

Dans le cadre de cette activité, les élèves doivent d'abord répondre individuellement à la question *Act3(Ind)-6*, pour ensuite échanger sur leurs solutions. Chez le groupe expérimental, le travail d'équipe se fait d'abord en salle de classe. Les échanges se poursuivent ensuite dans le forum électronique. La section qui suit présente une analyse de ces échanges en ligne.

4.5.3.3 Groupe expérimental (travail dans le forum électronique)

D'emblée, les élèves indiquent qui a raison et qui a tort entre Pierre et Paul. Bien entendu, ils doivent expliquer leur choix. Ils sont ensuite invités à commenter les choix de leurs collègues du Québec et du Nouveau-Brunswick. Lors de cette activité, afin de rappeler aux élèves de détailler leurs messages, une directive supplémentaire est ajoutée à la deuxième question du message initial publié dans le forum électronique. Celle-ci s'inspire des conseils donnés aux élèves du groupe expérimental pour débattre dans le forum (annexe 28, p. 392). Le message initial placé en ligne est présenté à la figure 61 (p. 234).



22/03/2009, À 15:27 #1
par **manon**

1. D'après vous, qui a raison entre Pierre et Paul? Qui a tort?
Expliquez votre choix.

2. Que pensez-vous des solutions proposées par vos collègues du Nouveau-Brunswick et du Québec?
N'oubliez pas de nous expliquer pourquoi vous êtes d'accord ou non avec leur choix. Êtes-vous capable de les convaincre que vous avez raison (ou qu'ils ont tort)?

Figure 61. Message initial placé dans le forum lors de la troisième activité (Act3(f)-6)

À la fin de l'expérimentation, ce message avait été lu 102 fois. Au total, 12 élèves ont participé à l'échange dans le forum électronique et 18 messages ont été publiés. Le peu de participation à cet échange peut être expliqué par le fait qu'une seule classe du groupe expérimental y a pris part. L'idée présentée dans chacun des 18 messages publiés en ligne fait l'objet du tableau LXVIII (p. 234).

Tableau LXVIII. Fréquence des idées présentes dans les messages des élèves du groupe expérimental dans le forum électronique lors de la troisième activité (Act3(f)-6)

	Fréquence
Évaluation du travail de Pierre et Paul	8
Évaluation du message d'un autre élève	7
Réponse seulement	1
Message à caractère social	1
Autres	1
Total	18

Lors de cette activité, presque autant de messages portent un jugement sur les preuves présentées par Pierre et Paul (huit sur 18) que sur un message publié par un pair (sept sur 18). Seuls trois messages n'entrent pas dans ces deux catégories : un élève ne fait qu'indiquer son choix de réponse, un autre rédige un message à caractère social et enfin, un dernier élève écrit un message dans lequel il semble répondre à une autre question.

Parmi les élèves qui jugent le choix de leurs pairs, bon nombre d'entre eux commentent, par le fait même, les preuves de Pierre et de Paul. Par conséquent, aucune distinction n'est faite entre les élèves qui répondent à la question *Act3(f)-6a* et ceux qui répondent à la question *Act3(f)-6b* lors de l'analyse des messages publiés dans le forum électronique. Une telle analyse permet d'avoir une meilleure vue d'ensemble des choix faits par les élèves en ce qui a trait au travail présenté par Pierre et Paul. Quinze élèves du groupe expérimental qui participent à cet échange précisent qui, entre Pierre et Paul, a raison et trois ne se prononcent pas (tableau LXIX, p. 235).

Tableau LXIX. Fréquence d'élèves du groupe expérimental qui optent pour chaque choix de réponses dans le forum électronique à la question Act3(f)-6a[117]

	Fréquence
Aucune précision	3
Pierre a raison	3
Paul a raison (réponse correcte)	8
Pierre et Paul ont raison tous les deux	4
Total	18

Tous les élèves qui se prononcent donnent raison à Pierre, à Paul, ou aux deux garçons. Aucun élève n'indique que ni Pierre ni Paul n'ont raison. Au total, huit élèves sur 18 mentionnent que Paul a raison (réponse correcte). Cette fraction est inférieure à ce qui a été observé lors du travail individuel sur papier, alors que 27 des 47 élèves donnaient raison à Paul. Par ailleurs, quatre élèves sur 18 croient que Pierre et Paul ont raison, alors que trois disent que seul Pierre a raison. Ces fractions sont moins élevées lorsque les élèves répondent individuellement à la question sur papier (respectivement 0 sur 47 et 7 sur 47). Ainsi, dans le forum électronique, il y a presque autant d'élèves qui répondent incorrectement à cette question qu'il y en a qui y répondent correctement et le travail effectué sur papier présente un taux plus élevé de bonnes réponses de la part des élèves que celui effectué en ligne. Toutefois, le peu de participation à cet échange et par le fait même le peu d'élèves ayant indiqué qui de Pierre ou de Paul a raison nous incitent à être prudente dans nos comparaisons entre les résultats découlant du travail effectué sur papier et ceux provenant des échanges en ligne.

Le tableau LXX (p. 236) présente les types d'arguments qui émergent des justifications données par les élèves du groupe expérimental lorsqu'ils évaluent une preuve dans le forum électronique.

[117] Dans le forum électronique, les élèves n'ont pas à cocher un choix de réponse. Ils doivent plutôt indiquer qui entre Pierre et Paul a raison et qui a tort. Aucun élève n'a précisé que l'un avait raison et que l'autre avait tort. Dans tous les cas, soit Pierre a raison, soit Paul a raison, soit les deux ont raison. C'est pour cette raison que les choix de réponse présenté dans le tableau ne correspondent pas aux choix de réponse présenté sur papier.

Tableau LXX. Fréquence de chaque type d'arguments utilisés par les élèves du groupe expérimental pour évaluer une preuve dans le forum électronique aux questions Act3(f)-6a et Act3(f)-6b

	Fréquence
Argumentation	2
Règles du débat mathématique	9
Autres	3
Total	14

Parmi les 14 commentaires émis, deux ont trait à l'argumentation et trois entrent dans la catégorie « Autres ». Dans les neuf autres messages publiés en ligne, une des règles du débat mathématique suivantes est mobilisée : tiers exclu, contre-exemple, propriétés mathématiques ou exemples. Le tableau LXXI (p. 236) montre les règles qui sont utilisées adéquatement ou qui sont enfreintes par les élèves lorsqu'ils échangent dans le forum électronique ainsi que le taux d'efficacité avec lequel les élèves utilisent ces règles.

Tableau LXXI. Fréquence des justifications des élèves du groupe expérimental qui présentent une utilisation adéquate ou qui enfreignent une règle du débat mathématique aux questions Act3(f)-6a et Act3(f)-6b dans le forum électronique et taux d'efficacité de chaque règle (n = 9)

	Usage adéquat	Règle enfreinte	Taux d'efficacité
Tiers exclu	0	1	0/1
Contre-exemple	4	0	4/4
Propriétés mathématiques	3	0	3/3
Exemples	0	1	0/1
Total	7	2	7/9

Sept fois sur neuf, les élèves utilisent adéquatement l'une des règles du débat mathématique. Quatre fois, la règle du débat mathématique qui porte sur l'utilisation d'un contre-exemple est utilisée et chaque fois, elle est utilisée adéquatement. Par exemple, des élèves qui mobilisent cette règle soulèvent la présence d'un contre-exemple dans la production de Paul et le fait que ce contre-exemple est suffisant pour invalider l'énoncé. Un de ces messages qui fait référence au contre-exemple de Paul est présenté au bas de la figure 62 (p. 237).

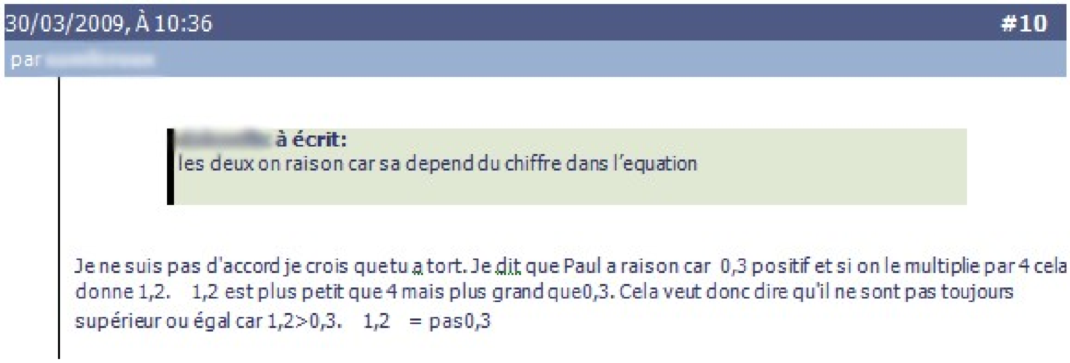


Figure 62. Contre-exemple à la question Act3(f)-6b

Dans trois autres messages, les élèves tentent de s'appuyer sur des propriétés mathématiques, même s'ils ne réussissent pas à le faire adéquatement. Voici un exemple de justification utilisée par un élève pour valider la preuve de Pierre : « Pierre a raison, car tous les nombres positifs ou n'importe lequel la réponse de sa MULTIPLICATION (produit) va sûrement être plus grande que le nombre du début… logique ;D[118] ». Il est intéressant de remarquer que l'élève tente d'attirer notre attention sur le mot « multiplication », alors qu'il l'écrit en majuscules. Il fait sans doute référence au fait que le produit de deux nombres naturels est toujours supérieur à ces nombres.

Enfin, un élève écrit : « je dis que les deux ont raison et que les réponses sont bonnes ». Son choix est uniquement basé sur l'exactitude des calculs présentés par Pierre et Paul. Cet élève enfreint la règle du tiers exclu et puisqu'il tire sa conclusion à partir de la simple validation des calculs présentés dans chacune des preuves, il ne se conforme pas à la règle qui touche l'utilisation de quelques exemples pour prouver.

4.5.3.4 Observations générales à la suite de l'analyse des résultats des questions Act3(Ind)-6a et Act3(Ind)-6b

Nous retrouvons principalement deux règles du débat mathématique qui sont exploitées correctement par les élèves de chacun des deux groupes : celle du contre-exemple ainsi que celle des propriétés mathématiques. La règle la plus enfreinte est celle du tiers exclu. La différence entre les deux groupes réside dans les pourcentages avec lesquels ces règles sont utilisées adéquatement ou enfreintes. En effet, les justifications données par les élèves du groupe contrôle enfreignent des règles du débat mathématique presque deux fois plus souvent que dans le groupe expérimental. Par ailleurs, les élèves du

[118] Cette écriture représente une émoticône qui fait un clin d'œil et qui présente un grand sourire.

groupe expérimental utilisent adéquatement la règle associée au contre-exemple deux fois plus souvent que les élèves du groupe contrôle (9 justifications sur 54 des élèves du groupe contrôle présentent une utilisation adéquate de cette règle alors que chez le groupe expérimental, ce taux est de 14/34). Enfin, bien que les échantillons du travail sur papier et en ligne pour le groupe expérimental soient d'un ordre de grandeur éloigné, on peut tout de même voir que le taux de règles utilisées adéquatement dans les commentaires des élèves du groupe expérimental lorsqu'ils échangent dans le forum électronique (7/9) est un peu plus élevé que celui observé sur papier (23/34). Cependant, les comparaisons entre ces deux types de travail doivent être faites avec réserve, car seuls cinq commentaires mobilisant une règle ont été écrits dans le forum électronique (comparativement à 34 commentaires sur papier).

4.5.4 Conclusion sur la 2e question de recherche : habiletés en lien avec l'évaluation de preuves et de solutions – Validation et invalidation de preuves

Dans le cadre de la deuxième activité, les élèves ont évalué des preuves développées par les membres de leur équipe concernant deux énoncés mathématiques à valider ou invalider (*Act2(Eq)-4a*, *Act2(Eq)-4b*, *Act2(Eq)-5a* et *Act2(Eq) - 5b*), tandis que la troisième activité invitait les élèves à évaluer les preuves de deux élèves fictifs (Pierre et Paul) afin d'identifier qui avait raison (*Act3(Ind)-6a* et *Act3(Ind)-6b*). L'analyse des commentaires émis par les élèves nous permet d'observer non seulement les règles mobilisées, mais également la justesse avec laquelle ces règles sont utilisées.

Les résultats obtenus lors de l'activité 2, alors que les élèves devaient juger de la validité des preuves développées par leurs pairs pour valider ou invalider deux énoncés mathématiques (l'un touchant l'expression $n \times n - n + 11$ et l'autre les nombres divisibles par 10 et par 5), permettent d'expliquer les observations faites lors de la troisième activité. Dans cette activité, aucun élève du groupe contrôle, dans ses commentaires, ne mobilise la règle du débat mathématique associée au contre-exemple. Chez le groupe expérimental, plusieurs élèves reconnaissent la puissance du contre-exemple et démontrent une utilisation adéquate de cette règle. Le forum électronique a pu avoir une influence sur le choix des élèves lorsqu'ils se sont retrouvés devant un contre-exemple, soit la solution de Paul, lors de la troisième activité. Effectivement, dans le cadre de la deuxième activité, lors du travail sur papier, certains élèves du groupe expérimental (et même certaines équipes) n'avaient pas trouvé le contre-exemple en lien avec l'énoncé $n \times n - n + 11$. Les échanges vécus en ligne par les élèves de ce groupe, grâce aux traces du forum électronique, ont permis non seulement d'exposer les élèves à l'existence d'un contre-exemple, mais également de leur faire réaliser que ce contre-exemple était suffisant pour invalider l'énoncé. Cette prise de conscience de la puissance du contre-exemple, réalisée lors de la deuxième activité, est reflétée chez les élèves du groupe expérimental lors de la troisième activité. En effet, dans cette activité, presque trois fois plus d'élèves du groupe contrôle (46 %) que du groupe expérimental (17 %) affirment que Pierre et Paul ont raison et un plus grand pourcentage d'élèves du groupe expérimental (57 %) que d'élèves du groupe contrôle (37 %) déterminent correctement que Paul a raison et que Pierre a tort.

En ce qui a trait aux règles du débat mathématique, les résultats de cette section permettent de remarquer que le pourcentage de commentaires dans lesquels les élèves mobilisent des règles du débat pour justifier leurs choix est plus élevé chez le groupe contrôle que chez le groupe expérimental. Cependant, un pourcentage plus important de commentaires émis par les élèves du groupe expérimental que par les élèves du groupe contrôle utilisent adéquatement ces règles, particulièrement celle en lien avec le contre-exemple. Lors des échanges en ligne, les élèves du groupe expérimental sont exposés à différentes justifications qui visent à valider ou invalider des énoncés ou des preuves et ces justifications sont par la suite elles-mêmes évaluées par les élèves. À la lumière de ce qui précède, la conjecture selon laquelle le forum électronique, à cause de la diversité des messages qui y sont présentés, a une influence sur l'utilisation que les élèves font des règles du débat mathématique semble de plus en plus plausible.

4.6 Habiletés en lien avec les problèmes de recherche de régularités

Lors de notre expérimentation, à trois reprises (*Pré(Ind)-1b*, *Act4(Ind)-7b* et *Post(Ind)-8b*), les élèves résolvent individuellement un problème où ils doivent d'abord rechercher une régularité dans une suite donnée de figures pour ensuite indiquer une façon de trouver le nombre d'objets dans n'importe quelle figure. Au départ, le fait de demander un tel type de questions aux élèves nous semblait pertinent pour nous renseigner sur les habiletés de validation algébrique. En effet, si nous supposons que lorsqu'un élève présente une solution, il la considère implicitement correcte, le type de solution soumis représente un indice sur ce qui est valide d'un point de vue mathématique. Or, le caractère de validité qui aurait pu être recherché par les élèves ne transparait pas dans les solutions qu'ils soumettent. Les tâches qui leur sont présentées, dans ce cas-ci, ne sont donc pas assez spécifiques pour nous permettre de retrouver ce que nous cherchions. Ainsi, ces questions ne représentent pas en soi une cueillette de données. Les élèves sont plutôt placées dans une situation d'action dans le but de nous permettre de recueillir des solutions qui leur seront par la suite présentées afin qu'ils les classent ou les (in)valident. Par conséquent, l'information recueillie lors de la situation d'action alimente la situation de validation dans laquelle les élèves vont se retrouver.

Dans les sections qui suivent, avant de présenter les solutions d'élèves retenues aux questions *Pré(Ind)-1b* et *Act4(Ind)-7b*[119], nous exposons les méthodes mise de l'avant par l'ensemble des élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental pour trouver le nombre d'objets dans n'importe quelle figure. La présentation de ces méthodes permet de dresser un portrait du type de travail que semblent préférer les élèves. Il importe de noter que, tout comme les preuves qui peuvent être classées comme étant empiriques ou intellectuelles, il est également possible d'organiser les solutions d'élèves de cette façon. Ainsi, le passage de solutions empiriques à des solutions plus intellectuelles est dénoté par la recherche de généralisation et le degré de formalisme plus élevé retrouvés dans une solution.

Chaque méthode à laquelle est associé le travail effectué par les élèves des deux groupes lors de la résolution des problèmes où la production d'un discours est nécessaire afin d'expliquer comment trouver le nombre d'objets dans une figure quelconque est présentée dans le tableau LXXII (p. 242). L'analyse des résultats permet d'observer qu'à une exception près, les méthodes les plus utilisées par les élèves lors du pré-test sont les mêmes. Les groupes semblent donc comparables a priori. En effet, les élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental optent surtout pour donner la règle à suivre pour compléter un tableau de valeurs (28 % et 24 % des solutions respectivement), expliquer des calculs à réaliser (23 % et 22 % des solutions respectivement) ou présenter une expression algébrique (12 % et 19 % des solutions respectivement). La plus grande différence lors du prétest réside dans le pourcentage de productions d'élèves qui suggèrent de faire un dessin pour trouver le nombre de cure-dents dans n'importe quelle figure. Le pourcentage de

[119] Étant donné que le post-test marque la fin de notre expérimentation, lors de cette activité, aucune solution d'élève n'est retenue pour ensuite être présentée à l'ensemble des élèves. Cependant, les méthodes utilisées par les élèves à la question *Post(Ind)-8b* sont tout de même présentées dans cette section (entre autres, pour voir s'il y a eu des changements entre le prétest et le post-test).

solutions des élèves du groupe contrôle qui présentent une telle suggestion est de 21 %, alors qu'il n'est que de 4 % pour le groupe expérimental. Il est aussi possible d'observer une augmentation du pourcentage de productions d'élèves qui présentent une expression algébrique entre le prétest et le post-test. Ce pourcentage passe de 12 % à 36 % pour le groupe contrôle, et ce passage se fait de façon assez graduelle. En ce qui a trait au groupe expérimental, le pourcentage de productions d'élèves qui proposent une expression algébrique lors du prétest est de 19 %. Ce pourcentage augmente à 40 % à la question Act4(Ind)-7b et demeure le même au post-test. Pour ce groupe, l'augmentation du pourcentage a lieu entre le prétest et la quatrième activité. Enfin, alors qu'à travers environ le même pourcentage de solutions les élèves du groupe contrôle expliquent comment faire le calcul nécessaire pour trouver le nombre de cure-dents recherché dans le prétest (23 %) et le post-test (26 %), une grande diminution des productions d'élèves qui présentent cette méthode est observée chez le groupe expérimental. En effet, ce pourcentage, qui est de 22 % au prétest, passe à 7 % au post-test. Encore une fois, pour ce dernier groupe, le plus grand changement a lieu entre le prétest et la quatrième activité.

Tableau LXXII. Fréquence et pourcentage de chaque catégorie associée aux solutions des élèves de chacun des deux groupes aux questions Pré(Ind)-1b, Act4(Ind)-7b et Post(Ind)-8b[120]

	Groupe contrôle						Groupe expérimental					
	Pré(Ind)-1b		Act4(Ind)-7b		Post(Ind)-8b		Pré(Ind)-1b		Act4(Ind)-7b		Post(Ind)-8b	
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
Aucun travail	6	11	5	8	6	9	6	11	5	9	7	12
Plusieurs dessins	0	0	0	0	2	3	4	7	2	4	2	4
Un seul dessin	12	21	3	5	2	3	2	4	3	5	1	1
Explication pour réaliser un dessin	0	0	3	5	0	0	0	0	0	0	2	4
Tableau de valeurs	0	0	1	2	0	0	4	7	5	9	2	4
Règle à suivre	16	28	18	29	13	20	13	24	9	17	10	18
Calculs	0	0	4	7	0	0	1	2	3	5	3	5
Explication d'un calcul à faire	13	23	12	20	17	26	12	22	5	9	4	7
Relations entre les données ou les nbs	0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	1	1
Expression algébrique	7	12	13	21	24	36	10	19	22	40	23	40
Inclassable	3	5	2	3	2	3	1	2	1	2	2	4
Total	57	100	61	100	66	100	54	100	55	100	57	100

[120] Quelques élèves ont présenté plus d'une solution à l'une ou plusieurs de ces questions. L'ensemble de ces solutions est présenté dans ce tableau (et dans les tableaux qui vont suivre).

Globalement, les résultats finaux chez le groupe contrôle et chez le groupe expérimental se ressemblent. En fait, il semble y avoir un certain avancement dans la hiérarchie du travail accompli par les élèves, alors qu'il est possible d'observer une augmentation assez importante dans le travail qui présente un haut niveau de généralité et de formalisme. La différence entre les deux groupes se situe dans le moment où cette évolution se produit. Dans un premier temps, une différence peut être observée au niveau de la temporalité, alors qu'une progression plus rapide vers les expressions algébriques est observée chez les élèves du groupe expérimental. Il est toutefois pertinent de se questionner sur la raison d'être de tels changements. En effet, si nous supposons que l'institutionnalisation est la même dans les deux groupes, il y a lieu de se demander si les élèves réalisent véritablement que le travail présentant un plus haut niveau de généralité et de formalisme est considéré comme étant mathématiquement plus rigoureux ou s'ils sont tout simplement sous l'effet du contrat didactique. La progression dans les niveaux de généralité est-elle perçue comme une obligation scolaire ou comme un savoir nécessaire? Des analyses plus approfondies sur les raisons qui poussent les élèves à retenir ou à rejeter une solution plutôt qu'une autre peuvent nous donner certaines pistes à ce sujet. Ces analyses sont présentées à la section *4.4 2^{e} question de recherche : habiletés en lien avec l'évaluation de preuves – Classement de preuves* (p. 181) et à la section *4.5 2^{e} question de recherche : habiletés en lien avec l'évaluation de preuves – Validation et invalidation de preuves* (p. 213). Dans un deuxième temps, il est possible de remarquer que bien qu'une augmentation des solutions qui présentent un niveau de formalisme élevé soit observée entre le prétest et le post-test chez les deux groupes, il demeure qu'un pourcentage assez important de solutions (20 % chez le groupe contrôle et 18 % chez le groupe expérimental) présentent la règle à suivre pour créer un tableau de valeurs, ce qui correspond à une méthode très empirique.

Les sections qui suivent présentent plus en détail le travail accompli par les élèves des groupes contrôle et expérimental à chacune des occasions où ils ont eu à trouver une régularité dans une suite donnée, puis à classer les solutions qui leur ont été présentées.

4.6.1 2^{e} question de recherche : habiletés en lien avec l'évaluation de solutions – Classement de solutions

L'étude des productions d'élèves développées lors d'activités réalisées en classe et dans le forum électronique, et plus précisément lorsqu'ils ont à classer des solutions de la plus convaincante à la moins convaincante et à justifier leurs choix, permet de répondre à notre deuxième question de recherche, soit :

1. Quelle est l'influence de l'utilisation d'un forum électronique, lors de la réalisation d'activités en algèbre, sur le développement d'habiletés en lien avec l'évaluation de preuves ou de solutions chez des élèves qui en sont à leur 8^{e} année de scolarité?
   ii. Quelles sont les règles du débat mathématique mobilisées par les élèves, en salle de classe (papier-crayon) ou dans un forum électronique, pour valider ou invalider une preuve ou une solution développée pour répondre à un problème algébrique?

Lors de l'expérimentation, les élèves ne classent des solutions de la plus convaincante à la moins convaincante qu'une fois, soit lors de la quatrième activité (*Act4(Eq)-7c* et *Act4(Eq)-7d*). Tout comme c'était le cas lors du classement de preuves, ils doivent par la suite justifier ce classement. Dans ce cas-ci, les solutions présentées aux élèves sont sélectionnées parmi l'ensemble des solutions soumises par les deux groupes. Elles sont variées et proposent différentes méthodes présentant des niveaux de formalisme et de généralité différents. Certaines de ces solutions peuvent être validées, tandis que d'autres peuvent être invalidées. Ce sont les raisons données par les élèves pour (in)valider ces solutions qui nous donnent de l'information sur les éléments qui leur permettent de considérer une solution comme étant plus convaincante qu'une autre. Ces mêmes informations nous permettent également de cibler les règles du débat mathématique mobilisées ou non par les élèves lorsqu'ils posent un jugement sur des solutions soumises à un problème de recherche de régularités.

4.6.1.1 Méthodes utilisées par les élèves (Act4(Ind)-7b), classement des solutions (Act4(Eq)-7c) et justifications des élèves (Act4(Eq)-7d) pendant l'enseignement

Dans le cadre de notre expérimentation, pendant l'enseignement régulier, une activité de recherche de régularités est présentée aux élèves. Ainsi, lorsqu'ils travaillent individuellement au début de la quatrième activité, les élèves doivent d'abord trouver le nombre de carreaux hachurés dans la huitième figure si cette dernière est construite selon le même modèle que les figures présentées ci-dessous (*Act4(Ind)-7a*). Ils doivent ensuite proposer une façon leur permettant de trouver le nombre de carreaux hachurés dans une figure quelconque (*Act4(Ind)-7b*).

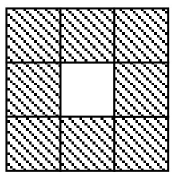


Figure n° 1

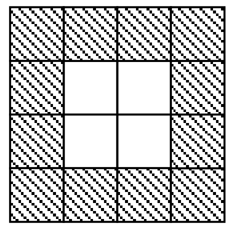


Figure n° 2

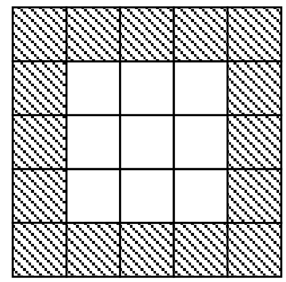


Figure n° 3

Les différentes catégories auxquelles peut être associé le travail réalisé par les élèves de chacun des deux groupes sont présentées au tableau LXXIII (p. 245).

Tableau LXXIII. Fréquence et pourcentage de chaque catégorie associée aux solutions des élèves de chacun des deux groupes à la question Act4(Ind)-7b

	Groupe contrôle		Groupe expérimental	
	Fréquence	%	Fréquence	%
Aucun travail	5	8	5	9
Plusieurs dessins	0	0	2	4
Un seul dessin	3	5	3	5
Explication pour réaliser un dessin	3	5	0	0
Tableau de valeurs	1	2	5	9
Règle à suivre	18	29	9	17
Calculs	4	7	3	5
Explication d'un calcul à faire	12	20	5	9
Relations entre les données ou les nombres	0	0	0	0
Expression algébrique	13	21	22	40
Inclassable	2	3	1	2
Total	61	100	55	100

Contrairement aux résultats obtenus à la question *Pré(Ind)-1b* (en lien avec l'agencement de cure-dents), où les deux groupes obtenaient sensiblement les mêmes pourcentages aux différentes méthodes auxquelles sont associées les productions des élèves, les résultats de la question *Act4(Ind)-7b*, plus précisément les pourcentages des solutions associées aux méthodes « Règle à suivre », « Explication d'un calcul à faire » et « expression algébrique », présentent des différences assez importantes. Les élèves du groupe contrôle semblent préférer le travail plus empirique, associée à la création d'un tableau de valeurs (dans ce cas-ci, 29 % des solutions d'élèves de ce groupe présentent la règle qui permet de passer d'une figure à la figure suivante, alors que ce pourcentage est de 17 % chez le groupe expérimental). Les élèves du groupe expérimental, pour leur part, optent davantage pour des solutions qui présentent une expression algébrique (40 % chez le groupe expérimental comparativement à 21 % chez le groupe contrôle). Ce changement dans le type de travail adopté par les élèves peut être expliqué par deux facteurs. D'une part, l'institutionnalisation relative à la recherche de régularités ainsi qu'au développement et à l'évaluation de preuves faite lors du travail sur les problèmes présentés dans le prétest et la première activité peut grandement influencer les élèves. Pourtant, si tel est le cas, une certaine variation devrait aussi être observée dans le travail complété par les élèves du groupe contrôle. Or, ce n'est pas le cas. Il y a alors lieu de supposer que les échanges dans le forum électronique peuvent avoir influencé les élèves au point de les amener à passer d'une méthode à une autre lors de la résolution des différents problèmes. En fait, le travail de formulation et de validation sollicité par le forum électronique pourrait avoir accéléré le déplacement des solutions empiriques vers l'expression algébrique pour le groupe expérimental.

L'ensemble des solutions proposées par les élèves des deux groupes alors qu'ils ont à identifier une façon de trouver le nombre de carreaux hachurés dans n'importe quelle figure construite fut examiné et cinq d'entre elles furent retenues afin d'être présentées à tous les élèves. La tâche des élèves consiste alors à classer ces solutions de la plus convaincante à la moins convaincante et à expliquer, pour chaque solution, ce qui est bien et ce qui est moins bien. Amener les élèves à se prononcer sur plusieurs solutions représente une autre façon de les amener à s'exprimer sur la validité du travail effectué. En effet, certains liens peuvent être faits entre les raisons données par les élèves et les règles du débat mathématique, même si ces dernières ont été développées dans l'optique du développement et de l'évaluation de preuves. C'est donc sous cette perspective que se fait l'analyse des résultats où les élèves analysent non pas des preuves, mais plutôt des solutions à des problèmes d'algèbre où entre en jeu la recherche de régularités.

Dans cette activité, aucune production d'élève ne subit de changement ou d'ajout et chacune d'entre elles est choisit en fonction du degré de généralité et du degré de formalisme qu'elle renferme. La solution 1 (figure 63, p. 247) consiste en une expression algébrique dans laquelle on précise clairement ce que représente l'inconnue. Cette solution présente un niveau de formalisme élevé.

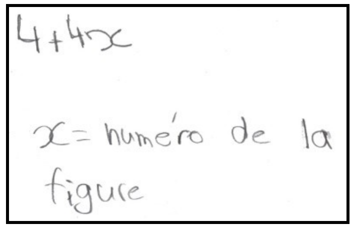


Figure 63. Première solution présentée aux élèves lors de l'activité 4 (expression algébrique)

La deuxième solution (figure 64, p. 247) comprend deux parties : une expression algébrique et deux exemples. L'expression mathématique en question comprend deux variables (n et r) qui ne sont pas identifiées. Dans un deuxième temps, l'élève utilise l'expression mathématique pour calculer le nombre de carreaux hachurés dans la treizième figure ainsi que dans la cinquantième figure. Le deuxième numéro de figure choisi étant beaucoup plus grand que le premier, cela confère un rôle particulier à ce deuxième exemple.

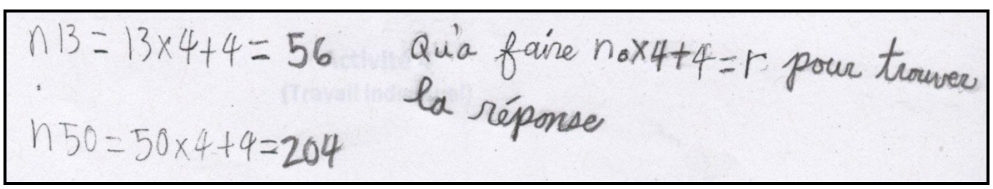
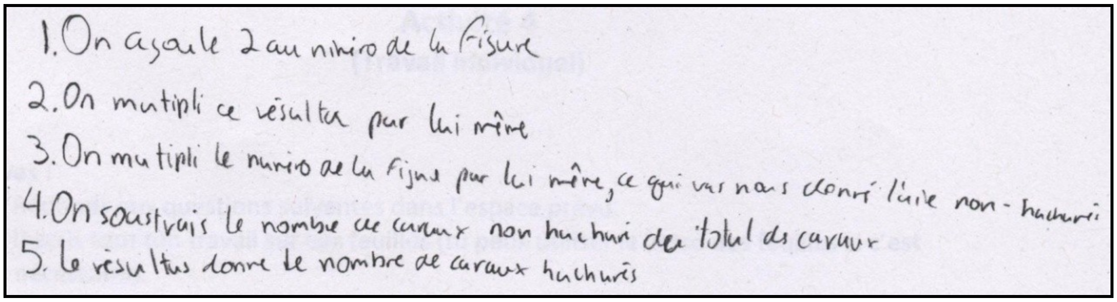


Figure 64. Deuxième solution présentée aux élèves lors de l'activité 4 (expression algébrique et calculs)

La troisième solution (figure 65, p. 248) est intéressante dans le sens où non seulement l'élève explique en détail chacune des étapes à réaliser pour trouver le nombre de carreaux hachurés, mais il procède également par l'aire pour arriver à une réponse, alors que les autres solutions traitent plutôt le contour.



1. On agoute 2 au niméro de la fisure
2. On mutipli ce résulta par lui même
3. On mutipli le numéro de la fijure par lui même, ce qui vas nous donné l'aire non-hachuré
4. On soustrais le nombre de carraux non hachuré du total des carraux
5. Le résultas donne le nombre de carraux hachurés

Le texte apparaissant dans la solution de l'élève est retranscrit ci-dessous :

1. On ajoute 2 au numéro de la figure
2. On multiplie ce résultat par lui-même
3. On multiplie le numéro de la figure par lui-même, ce qui va nous donner l'aire non hachurée
4. On soustrait le nombre de carreaux non hachurés du total de carreaux
5. Le résultat donne le nombre de carreaux hachurés.

Figure 65. Troisième solution présentée aux élèves lors de l'activité 4 (explication d'un calcul à faire)

Dans la quatrième production retenue (figure 66, p. 249), l'élève présente un calcul qu'il explique à l'aide d'un dessin. Ce dessin, bien qu'il soit lié à la figure numéro 8, représente un exemple plus générique et permet d'illustrer comment trouver le nombre de carreaux hachurés pour toutes les figures, et pas seulement pour celle dessinée. Finalement, cet élève tente de traduire son raisonnement en une expression algébrique.

Enfin, dans la solution 5 (figure 67, p. 249), l'élève précise la règle à suivre pour trouver le nombre de carreaux hachurés d'une figure quelconque si le nombre de carreaux hachurés de la figure précédente est connu. Cet élève illustre ensuite ses propos en produisant un tableau de valeurs. Plus le numéro de la figure est élevé, plus cette façon de faire est coûteuse, car il est impossible de calculer directement le nombre de carreaux hachurés dans une figure sans connaître le nombre de carreaux hachurés dans la figure précédente. Cette solution représente donc un travail pragmatique, fondé sur une série de calculs.

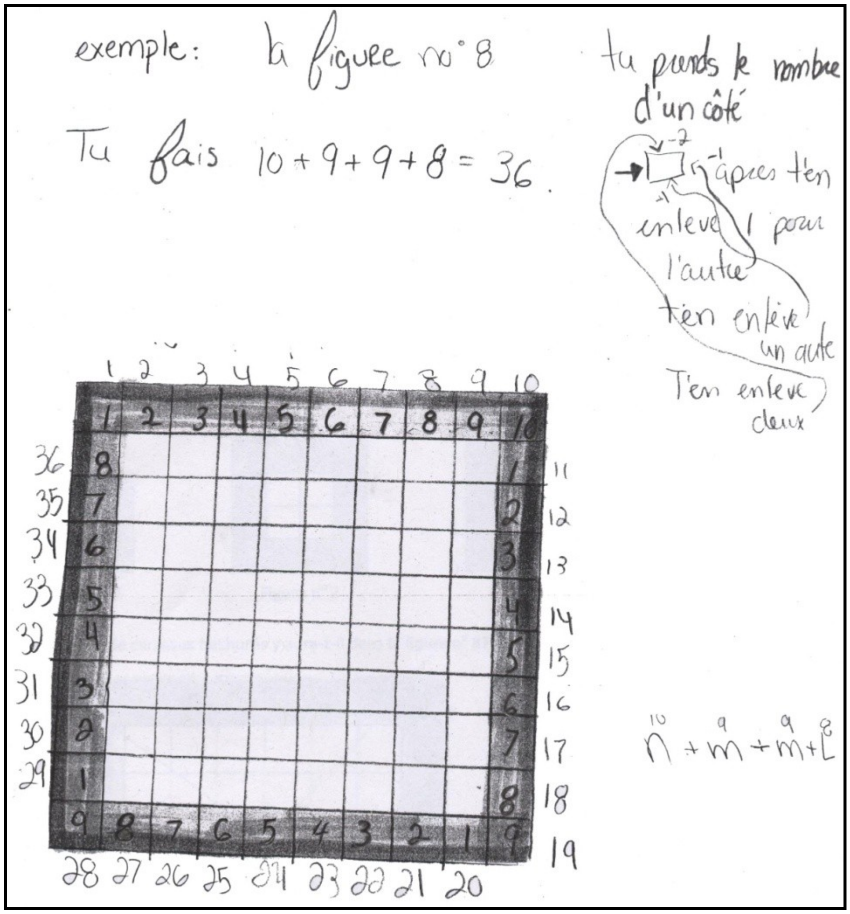


Figure 66. Quatrième solution présentée aux élèves lors de l'activité 4 (calcul, explication d'un calcul à faire, un seul dessin et expression algébrique)

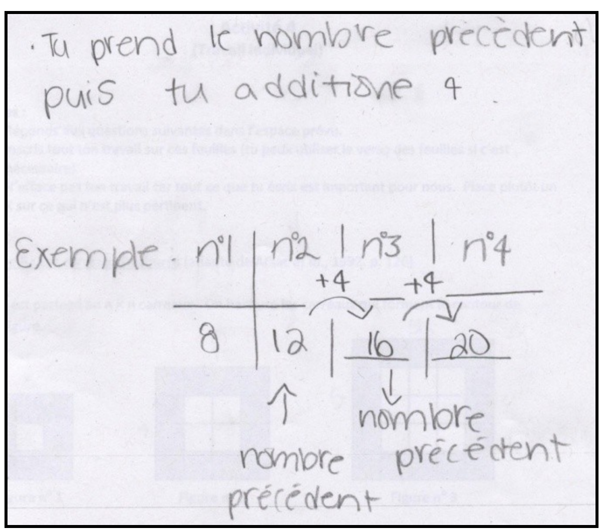


Figure 67. Cinquième solution présentée aux élèves lors de l'activité 4 (règle à suivre et tableau de valeurs)

Les rangs moyens obtenus pour chacune des solutions analysées par les deux groupes sont mis en évidence au tableau LXXIV (p. 250). Pour avoir plus de détails en ce qui a trait au pourcentage d'élèves de chacun des deux groupes qui associent une preuve à un rang donné, voir le tableau XCVIII à l'annexe 29 (p. 393).

Tableau LXXIV. Rang moyen auquel les élèves de chacun des deux groupes classent les solutions à la question Act4(Eq)-7c

	Groupe contrôle	Groupe expérimental
Expression algébrique (s1)	2,6	3,1
Expression algébrique et calculs (s2)	2,7	2,7
Explication d'un calcul à faire (s3)	3,5	3,5
Calcul, explication d'un calcul à faire, un seul dessin et expression algébrique (s4)	4,1	3,3
Règle à suivre et tableau de valeurs (s5)	2,2	2,4

C'est la solution 5, qui présente la règle à suivre pour passer d'une figure à la suivante ainsi qu'un tableau de valeurs, qui est préférée par les élèves des deux groupes. La solution 1 (expression algébrique) ainsi que la solution 2 (expression algébrique et calculs) se retrouvent respectivement aux deuxième et au troisième rang pour le groupe contrôle. L'ordre est inversé pour le groupe expérimental. Ce sont les solutions qui présentent des explications en mots, soit la solution 3 (Explication d'un calcul à faire) et la solution 4 (calcul, explication d'un calcul à faire, un seul dessin et expression algébrique) qui convainquent le moins les élèves des deux groupes et qui se retrouvent au quatrième et au cinquième rang. Encore une fois, l'ordre d'apparition de ces deux solutions dans la hiérarchie des préférences des élèves est inversé dans les deux groupes. Les sections suivantes présentent plus en détail les particularités propres à chacun des groupes.

4.6.1.1.1 Groupe contrôle.

Le calcul du rang moyen permet de prendre en considération la fréquence où chaque rang est attribué à chaque solution. Les moyennes pondérées obtenues pour chaque solution proposée aux élèves du groupe contrôle sont présentées au tableau LXXV (p. 251).

Tableau LXXV. Rang moyen auquel les élèves du groupe contrôle classent les solutions à la question Act4(Eq)-7c

	Rang moyen
Règle à suivre et tableau de valeurs (s5)	2,2
Expression algébrique (s1)	2,6
Expression algébrique et calculs (s2)	2,7
Explication d'un calcul à faire (s3)	3,5
Calcul, explication d'un calcul à faire, un seul dessin et expression algébrique (s4)	4,1

C'est la solution 5, qui propose un tableau de valeurs ainsi que la règle à suivre pour passer d'une figure à la figure suivante, qui semble globalement la plus convaincante à leurs yeux. La solution 1 (expression algébrique) et la solution 2 (expression algébrique et calculs) arrivent respectivement aux deuxième et troisième rangs. Les rangs moyens obtenus pour ces deux solutions sont très rapprochés, ce qui peut être expliqué par le fait qu'elles présentent toutes les deux une expression mathématique permettant de calculer le nombre de carreaux hachurés dans n'importe quelle figure. Non seulement ces deux solutions mettent en valeur une expression, mais cette expression, à la base, est la même (les élèves doivent multiplier le numéro de la figure par 4 et ajouter 4 au produit obtenu). Finalement, la solution 3 (Explication d'un calcul à faire) et la solution 4 (calcul, explication d'un calcul à faire, un seul dessin et expression algébrique) occupent respectivement le quatrième et le cinquième rang.

Afin de mieux saisir les raisons qui poussent les élèves à accorder un meilleur rang à une production plutôt qu'à une autre, une analyse plus approfondie s'impose. Au total, les élèves du groupe contrôle évoquent quatre éléments en faveur ou en défaveur d'une ou de plusieurs solutions qui nous permettent de faire des liens avec les règles du débat mathématique d'Arsac et al. (1992) ou avec l'argumentation. Ces éléments sont les suivants :

- Exemples : présence/absence d'exemples ou qualité des exemples dans la solution.
- Idée de généralité : possibilité de généraliser à partir de la solution proposée.
- Algèbre : utilisation ou non de l'algèbre dans la présentation de la solution.
- Argumentation : confirmation que la méthode utilisée est la même que celle de l'élève qui évalue, appréciation de la clarté de la solution, de la quantité d'information présentée, etc.

Le tableau LXXVI (p. 252) met de l'avant les différentes catégories d'arguments en faveur d'une solution évoquées par les élèves lorsqu'ils justifient leur classement.

Tableau LXXVI. Fréquence et pourcentage de chaque raison évoquée par les élèves du groupe contrôle comme argument en faveur d'une solution à la question Act4(Eq)-7d (n = 135)

	Exemples		Idée de généralité		Algèbre		Argumentation	
	F	%	F	%	F	%	F	%
Expression algébrique (s1)	s/o	0	1	1	1	1	26	19
Expression algébrique et calculs (s2)	3	2	0	0	0	0	19	14
Explication d'un calcul à faire (s3)	s/o[121]	0	4	3	s/o	0	21	16
Calcul, explication d'un calcul à faire, un seul dessin et expression algébrique (s4)	3	2	0	0	0	0	13	10
Règle à suivre et tableau de valeurs (s5)	6	4	s/o	0	s/o	0	38	28
Total	12	8	5	4	1	1	109	87

Cent-neuf commentaires, soit 87 % des commentaires émis, concernent des éléments qui sont liés à l'argumentation. Par exemple, plusieurs élèves présentent des justifications qui touchent le degré de simplicité associée à une solution ou la qualité ainsi que la quantité d'explications fournies, tandis que d'autres identifient une solution comme étant la plus convaincante, car ils ont procédé de la même façon pour répondre à la question. Dans ce dernier cas, les élèves ont tendance à utiliser des arguments d'autorité. Ainsi, les élèves qui ont recours à ce type de justifications pour expliquer leur choix ne s'appuient aucunement sur des arguments mathématiques et ne respectent pas la règle du débat mathématique qui porte sur les propriétés mathématiques.

Un des éléments qui semble conduire les élèves à considérer une solution comme étant plus convaincante qu'une autre est la présence d'exemples. Au total, 8 % des raisons évoquées par les élèves du groupe contrôle entrent dans cette catégorie. Dans le deuxième commentaire présenté ci-dessous, il est intéressant de remarquer que chaque exemple est

[121] Il arrive que des éléments ne s'appliquent pas à certaines des solutions présentées aux élèves. Par exemple, la présence de l'algèbre ne peut pas être évoquée comme argument en faveur de la solution associée à l'empirisme naïf, car aucune trace d'algèbre n'y apparaît. De telles situations sont discernées par la mention s/o (sans objet) dans le tableau.

considéré comme une preuve, ce qui amène l'élève à affirmer qu'il y a « beaucoup de preuves ».

- « Il y a des exemples et des solutions qui prouvent son raisonnement. » (S5; R2)
- « Le fait de le voir est convaincant et il y a beaucoup de preuves. » (S5; R2)

Dans de tels commentaires, la règle du débat mathématique qui touche l'utilisation d'exemples pour prouver est enfreinte. Les autres raisons auxquelles les élèves de ce groupe font allusion n'apparaissent que dans 6 % des cas ou moins. Seuls cinq commentaires présentent une justification dans laquelle l'idée de généralité apparaît. Ils précisent, par exemple, que « ça marche à tous les coups avec n'importe quel exemple » (S3; R1). Évidemment, ce genre de justification porte sur les solutions 1 et 3, soient celles qui présentent respectivement une expression algébrique et l'explication d'un calcul à faire.

À travers leurs commentaires, les élèves du groupe contrôle font également ressortir certains éléments en défaveur des solutions qui leur sont présentées (tableau LXXVII, p. 254). Encore une fois, la majorité des commentaires (80 %) portent sur le degré de difficulté des solutions, sur le manque de clarté des explications offertes ou sur l'absence totale d'explications. L'absence d'exemples concrets dans une solution semble aussi influencer la décision des élèves du groupe contrôle. Au total, 13 % des commentaires reprochent ce manque d'exemples à certaines solutions. Dans la plupart des cas, ce reproche touche les solutions qui mettent de l'avant une simple explication des calculs à faire (solution 3) ou qui ne présente qu'une expression algébrique (solution 1).

- « C'est moins convaincant, il n'y a pas d'exemples. » (S3; R5)
- « Est bon, car il se fait de l'algèbre, mais c'est mieux de montrer l'exemple pour que la personne soit convaincue. » (S1; R3)

Tableau LXXVII. Fréquence et pourcentage de chaque raison évoquée par les élèves du groupe contrôle comme argument en défaveur d'une solution à la question Act4(Eq)-7d (n = 152)[122]

	Exemples		Idée de généralité		Algèbre		Argumentation	
	F	%	F	%	F	%	F	%
Expression algébrique (s1)	13	8	0	0	0	0	17	11
Expression algébrique et calculs (s2)	1	1	0	0	0	0	25	16
Explication d'un calcul à faire (s3)	6	4	1	1	2	1	38	25
Calcul, explication d'un calcul à faire, un seul dessin et expression algébrique (s4)	0	0	0	0	0	0	41	27
Règle à suivre et tableau de valeurs (s5)	0	0	7	5	0	0	1	1
Total	20	13	8	6	2	1	122	80

Toutefois, un élément particulier ressort de l'analyse des deux tableaux présentant les raisons qui poussent les élèves à juger favorablement ou non une solution. Étant donné que la deuxième solution ressemble, dans sa forme, à la solution 1, il est raisonnable de présumer que les explications de la part des élèves sont sensiblement les mêmes. Ce n'est pourtant pas le cas, du moins pas autant que ce que nous pouvons escompter. Comme nous venons de le voir, l'un des éléments reprochés à la première solution est qu'elle ne contient aucun exemple. Normalement, les exemples présents dans la solution 2 devraient être évoqués en tant qu'élément positif. Or, seuls trois élèves[123] mentionnent la présence d'exemples dans cette solution. Il semble donc que l'absence d'exemples influence davantage les élèves que la présence d'exemples.

Enfin, huit commentaires (6 %) soulignent le manque de généralisation possible à partir de certaines solutions. Dans sept de ces huit cas, ce manque de généralisation est reproché à la solution 5, qui consiste en la présentation d'un tableau de valeurs et de la règle qui permet de faire le passage d'une figure à la figure suivante.

[122] La mention s/o (sans objet) ne peut être attribuée à aucune des cellules de ce tableau, car les élèves peuvent reprocher le fait qu'un élément soit absent de la solution présentée ou encore critiquer la présence ou la qualité d'un élément retrouvé dans ladite solution. Par conséquent, même si ce n'est pas le cas dans ce tableau, il est possible de retrouver un commentaire dans chacune des cellules.

[123] Ces trois élèves donnent exactement la même explication (mots pour mots). Nous pouvons donc supposer qu'ils font partie de la même équipe.

- « La solution 5 est un peu trop compliquée si on demande pour trouver la figure numéro 100 ». (S5; R3)
- « Parce que la seule façon pour utiliser cette formule c'est de savoir la réponse du numéro précédent, donc cette formule est la plus compliquée des cinq solutions. » (S5; R5)

4.6.1.1.2 <u>Groupe expérimental (travail sur papier)</u>.

Chez les élèves du groupe expérimental, la solution 1 qui propose une expression algébrique obtient à la fois le plus grand pourcentage pour le premier rang et pour le dernier rang. Ce sont de telles observations qui rendent pertinent le calcul d'un rang moyen (tableau LXXVIII, p. 255).

Tableau LXXVIII. Rang moyen auquel les élèves du groupe expérimental classent les solutions à la question Act4(Eq)-7c

	Rang moyen
Règle à suivre et tableau de valeurs (s5)	2,4
Expression algébrique et calculs (s2)	2,7
Expression algébrique (s1)	3,1
Calcul, explication d'un calcul à faire, un seul dessin et expression algébrique (s4)	3,3
Explication d'un calcul à faire (s3)	3,5

Tout comme c'est le cas pour le groupe contrôle, la solution 5, qui présente l'explication de la règle à suivre pour passer d'une figure à la figure suivante ainsi qu'un tableau de valeurs dans lequel cette règle est appliquée, est globalement considérée comme la plus convaincante par les élèves du groupe expérimental. Les solutions qui arrivent aux deuxième et troisième rangs du classement dans les deux groupes sont inversées. Ainsi, chez le groupe expérimental, c'est la solution qui met de l'avant une expression algébrique et des calculs (solution 2) qui occupe le deuxième rang tandis que la solution qui fournit une expression algébrique (solution 1) est troisième. La présence d'exemples dans la solution 2 semble donc davantage influencer les élèves du groupe expérimental que les élèves du groupe contrôle. Les deux solutions qui arrivent à l'avant-dernier et au dernier rang sont, respectivement, la solution 4 (calcul, explication d'un calcul à faire, un seul dessin et expression algébrique) et la solution 3 (explication d'un calcul à faire). Les deux mêmes solutions sont retrouvées à la fin du classement du groupe contrôle, mais dans l'ordre inverse.

Afin de mieux comprendre les raisons qui poussent les élèves à se laisser davantage convaincre par une solution que par une autre, voyons les différentes catégories auxquelles les élèves font allusion pour expliquer leur classement (tableau LXXIX, p. 256).

Tableau LXXIX. Fréquence et pourcentage de chaque raison évoquée par les élèves du groupe expérimental comme argument en faveur d'une solution à la question Act4(Eq)-7d (n = 52)

	Exemples		Idée de généralité		Algèbre		Argumentation	
	F	%	F	%	F	%	F	%
Expression algébrique (s1)	s/o	0	0	0	1	2	11	21
Expression algébrique et calculs (s2)	0	0	2	3	1	2	6	12
Explication d'un calcul à faire (s3)	s/o	0	0	0	s/o	0	5	10
Calcul, explication d'un calcul à faire, un seul dessin et expression algébrique (s4)	0	0	0	0	0	0	9	17
Règle à suivre et tableau de valeurs (s5)	3	6	s/o	0	s/o	0	14	27
Total	3	6	2	3	2	4	45	87

Les mêmes catégories qui ressortent chez le groupe contrôle ressortent chez le groupe expérimental, et ce, avec à peu près les mêmes pourcentages. Dans la plupart des cas (87 %), les principales raisons évoquées par les élèves pour témoigner du pouvoir de convaincre d'une solution sont le degré de simplicité de la solution, la présence et la qualité des explications mises de l'avant dans la solution ainsi que la présence d'un support visuel. Ainsi, tout comme chez le groupe contrôle, la plupart des élèves ne se basent pas sur des arguments mathématiques pour expliquer leurs réponses.

Trois commentaires mettent en valeur l'exemple présenté dans la solution composée d'un tableau de valeurs et de la règle à suivre pour passer d'une figure à la figure suivante (solution 5). En fait, tous les commentaires en lien avec la présence d'exemples sont liés à cette solution. Par conséquent, la conjecture émise un peu plus tôt, selon laquelle le meilleur rang moyen obtenu par la solution 2 (expression algébrique et calculs) comparativement à celui obtenu par la solution 1 (expression algébrique) pourrait être expliqué par la présence de deux exemples dans la deuxième solution doit être rejetée.

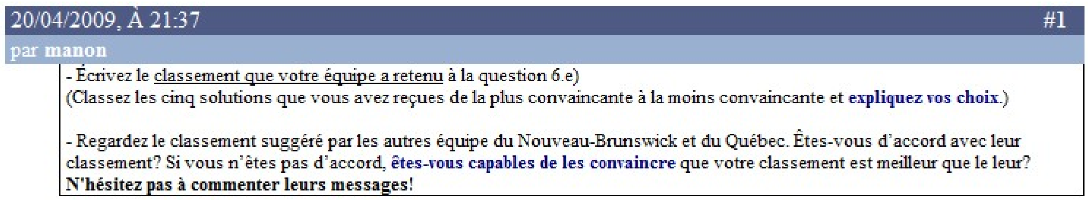
Un autre élément mérite d'être soulevé. En effet, il est intéressant de remarquer que seuls deux commentaires présentent une appréciation pour la présence de l'algèbre dans les solutions 1 (expression algébrique) et 2 (expression algébrique et calculs). De plus, deux commentaires évoquent l'idée de généralité. Or, ces deux derniers commentaires touchent la solution 2, qui présente à la fois une expression algébrique et des calculs. La solution 1, qui ne propose qu'une expression algébrique, n'attire pas ce genre de commentaire de la part des élèves. Est-il possible que ce soient les exemples qui amènent les élèves à reconnaître le caractère de généralité propre à la deuxième solution, alors qu'ils ne semblent pas le reconnaître dans la première solution?

Les commentaires des élèves contiennent également certains reproches par rapport aux solutions qui leur sont présentées. La majeure partie des reproches émis dans les commentaires des élèves sont associés à l'argumentation (88 %) et concernent le degré de difficulté de certaines des solutions en jeu, les explications fournies (ou non) dans les solutions ou le coût en ce qui a trait au temps. Ce type de reproches explique, entre autres, pourquoi la solution 3, qui offre une explication sur un calcul à faire, se retrouve au dernier rang. Les élèves reprochent le trop grand nombre d'explications à cette solution : « elle fonctionne, mais elle est trop compliquée et il y a trop d'étapes ». Quatre élèves (6 %) soulèvent l'idée de généralité dans leurs commentaires, dont deux relativement à la solution 1 (expression algébrique). Ces élèves placent cette solution au cinquième rang et disent qu'« elle fonctionne pour le premier, mais pas les autres ». Deux autres élèves accordent le cinquième rang à la solution 5 (règle à suivre et tableau de valeurs) et justifient leur choix en soulignant que « c'est simple, mais ce n'est pas très efficace pour les plus grandes figures ». Enfin, quatre commentaires (5 %) touchent l'absence d'algèbre et un (1 %) l'absence d'exemples dans une solution. Il est toutefois surprenant de remarquer que l'absence d'algèbre, ou plutôt le fait que la solution ne soit pas « mise en formule » est reproché à la solution 2 (expression algébrique et calculs), alors que celle-ci présente une expression algébrique.

Pour clore la quatrième activité, les élèves du groupe expérimental échangent dans le forum électronique. Ces échanges sont analysés et les résultats qui découlent de cette analyse font l'objet de la prochaine section.

4.6.1.1.3 <u>Groupe expérimental (travail dans le forum électronique)</u>.

Les élèves du groupe expérimental doivent d'abord présenter le classement final retenu par leur équipe et expliquer leurs choix. Par la suite, ils ont pour tâche de commenter le classement suggéré par les autres équipes. S'ils ne sont pas d'accord avec un certain classement, ils doivent tenter de convaincre les élèves qui le proposent qu'ils ont raison. La figure 68 (p. 258) représente le message initial placé en ligne pour cette activité.



20/04/2009, À 21:37 #1

par **manon**

- Écrivez le classement que votre équipe a retenu à la question 6.e)
(Classez les cinq solutions que vous avez reçues de la plus convaincante à la moins convaincante et **expliquez vos choix**.)

- Regardez le classement suggéré par les autres équipe du Nouveau-Brunswick et du Québec. Êtes-vous d'accord avec leur classement? Si vous n'êtes pas d'accord, **êtes-vous capables de les convaincre** que votre classement est meilleur que le leur?
N'hésitez pas à commenter leurs messages!

Figure 68. Message initial placé dans le forum lors de la quatrième activité (Act4(f)-7)

Vingt-et-un élèves provenant des deux classes qui forment le groupe expérimental ont participé à cet échange en ligne. Au total, le message initial a été lu 181 fois et 34 messages ont été publiés dans le forum électronique. Seuls cinq messages présentent explicitement un classement. Toutefois, d'autres messages, à travers leurs justifications, précisent le rang attribué à une solution. Ces deux types de messages sont utilisés pour présenter le pourcentage d'élèves qui associent une preuve à un rang donné (tableau LXXX, p. 258).

Tableau LXXX. Fréquence des élèves du groupe expérimental qui associent une preuve à un rang donné dans le forum électronique (Act4(f)-7) (n = 34)

	1er rang	2e rang	3e rang	4e rang	5e rang
Expression algébrique (s1)	4	0	0	2	4
Expression algébrique et calculs (s2)	3	1	0	1	2
Explication d'un calcul à faire (s3)	0	0	5	0	0
Calcul, explication d'un calcul à faire, un seul dessin et expression algébrique (s4)	2	2	0	2	0
Règle à suivre et tableau de valeurs (s5)	4	2	0	0	0
Total	13	5	5	5	6

Abstraction faite de la solution 5 (règle à suivre et tableau de valeurs) qui est toujours classée au premier ou au deuxième rang et de la solution 3 (explication d'un calcul à faire) a qui le troisième rang est invariablement attribué, les rangs rattachés aux solutions varient. Par exemple, autant de messages reconnaissent la solution 1, qui présente une expression algébrique, comme étant la plus convaincante et la moins convaincante des cinq solutions. Le calcul du rang moyen s'avère donc utile (tableau LXXXI, p. 259).

Tableau LXXXI. Rang moyen auquel les élèves du groupe expérimental classent les solutions dans le forum électronique (Act4(f)-7)

	Rang moyen
Règle à suivre et tableau de valeurs (s5)	1,3
Calcul, explication d'un calcul à faire, un seul dessin et expression algébrique (s4)	2,3
Expression algébrique et calculs (s2)	2,5
Explication d'un calcul à faire (s3)	3,0
Expression algébrique (s1)	3,2

Comme c'est le cas lors du travail sur papier, les élèves du groupe expérimental accordent globalement le meilleur rang à la solution 5, qui fait voir un tableau de valeurs ainsi que la règle à suivre pour passer d'une figure à la figure suivante. Toutefois, le rang associé à toutes les autres solutions est modifié. La solution 2 (expression algébrique et calculs) passe du deuxième au troisième rang, alors que la solution 3 (explication d'un calcul à faire) grimpe d'un rang, passant du cinquième au quatrième rang. Enfin, la solution 4 (calcul, explication d'un calcul à faire, un seul dessin et expression algébrique) passe du quatrième au deuxième rang tandis que la solution 1 (expression algébrique) passe du troisième au dernier rang.

À la lumière de ces résultats et étant donné que les rangs moyens obtenus à partir du travail effectué sur papier diffèrent des rangs moyens calculés à partir des messages publiés dans le forum électronique, il semble pertinent d'analyser plus en profondeur les messages où les élèves commentent certaines solutions (tableau LXXXII, p. 260).

Tableau LXXXII. Fréquence de chaque raison évoquée par les élèves du groupe expérimental comme argument en faveur d'une solution dans le forum électronique (Act4(f)-7) (n = 16)

	Idée de généralité	Algèbre	Argumentation
Aucune précision de la solution en jeu	0	0	2
Expression algébrique (s1)	1	2	5
Expression algébrique et calculs (s2)	0	0	3
Calcul, explication d'un calcul à faire, un seul dessin et expression algébrique (s4)	0	0	1
Règle à suivre et tableau de valeurs (s5)	s/o	s/o	2
Total	1	2	13

Les catégories de raisons qui émergent des échanges en ligne diffèrent un peu de celles dégagées du travail sur papier. Il est possible de remarquer que la catégorie « Exemples », ressortie sur papier, n'apparaît pas en ligne. Ce sont toutefois encore les justifications associées à l'argumentation, plus précisément celles qui concernent le degré de facilité associé à la compréhension ou à la réutilisation de la méthode ainsi que la qualité des explications fournies qui sont les plus populaires (parmi les 16 raisons évoquées par les élèves, 13 d'entre elles touchent l'un ou l'autre de ces éléments). L'idée de généralité n'est soulevée que dans un cas et elle est associée à la solution 1 (expression algébrique). L'élève affirme : « nous sommes d'accord que la solution numéro 1 est la plus convaincante, car tu peux trouver n'importe quelle figure » (S1; R1). Enfin, deux élèves soulignent la présence de l'algèbre dans cette même solution (solution 1). Bien que la simple présence d'algèbre ne garantisse aucunement la validité d'une solution, un tel commentaire démontre tout de même un certain souci pour le formalisme reflété dans le travail présenté.

À travers les commentaires qui paraissent en ligne, les élèves soulèvent également différents éléments qu'ils reprochent aux cinq solutions en jeu dans cette activité. Les catégories « Exemples » et « Algèbre », qui apparaissent dans le travail sur papier, n'émergent pas des messages en ligne. Évidemment, vu le peu de commentaires qui soulèvent des lacunes en lien avec certaines solutions (sept au total), il est normal que toutes les catégories ne ressortent pas lors des échanges dans le forum électronique. Ainsi, ces sept commentaires représentent tous une forme d'argumentation. Trois d'entre eux visent la solution 5 qui suggère de faire un tableau de valeurs et qui présente la règle à suivre pour remplir ce tableau. Dans les trois cas, c'est le coût, en termes de temps, qui est problématique. Deux messages soulignent le degré de compréhension peu élevé associé à la solution 1 (expression algébrique). Deux autres reproches sont faits par rapport à cette solution, soit qu'elle n'est « pas bien expliquée » et qu'elle « fonctionnait seulement avec la un ». Ce dernier commentaire est assez surprenant, car il concerne le manque de généralité de la solution. Or, l'expression algébrique suggérée dans la solution 1 permet de trouver le nombre de carreaux hachurés dans toutes les figures, peu importe leur numéro.

4.6.1.1.4 Observations générales et conclusion à la suite de l'analyse des résultats des questions Act4(Eq)-7c et Act4(Eq)-7d.

Les rangs moyens calculés à partir des classements suggérés par les élèves à la question *Act4(Eq)-7c* permettent de remarquer certaines ressemblances entre le groupe contrôle et le groupe expérimental. Dans les deux groupes, c'est la solution qui propose de faire un tableau de valeurs en précisant la règle à suivre pour passer d'une figure à la figure suivante (solution 5) qui se retrouvent au premier rang. Les deuxième et troisième rangs sont occupés par les solutions qui mettent de l'avant une expression algébrique, qu'elle soit seule ou accompagnée de calculs (solutions 1 et 2). La solution qui présente l'explication d'un calcul à faire (solution 3) ainsi que la solution formée de différentes méthodes (solution 4), soit un calcul, l'explication d'un calcul à faire, un seul dessin et une expression algébrique, sont aux quatrième et cinquième rangs. Les résultats du travail effectué dans le forum électronique diffèrent un peu. En effet, les solutions qui présentent des éléments plus pragmatiques (les solutions 5, 4 et 2) occupent les trois premiers rangs, alors que les solutions qui présentent un degré de formalisme et de généralité plus élevé, soit les solutions 4 et 1, sont reléguées aux quatrième et cinquième rangs.

Les élèves de chacun des deux groupes justifient leur classement en se basant principalement sur l'argumentation, plus précisément sur des éléments tels que la clarté des explications ou la facilité de compréhension d'une solution. Évidemment, de tels arguments ne sont pas garants de la validité d'une solution. Parmi les autres éléments soulevés dans les justifications, les élèves du groupe contrôle font appel à la présence ou à l'absence d'exemples pour juger de la qualité d'une solution trois fois plus souvent que les élèves du groupe expérimental (dans la plupart des cas, les élèves du groupe contrôle reprochent à la solution 1, associée à l'expression algébrique, de ne pas contenir d'exemple). Les élèves du groupe contrôle sont donc plus nombreux à ne pas respecter la règle des exemples. Le deuxième type d'argument le plus soulevé par ces élèves est associé à l'idée de généralité. Dans ce cas-ci, cet argument est principalement utilisé en défaveur de la solution qui suggère de faire un tableau de valeurs et qui présente la règle à suivre pour compléter ce tableau (solution 5). Chez le groupe expérimental, c'est la présence d'algèbre qui influence surtout le choix des élèves. Évidemment, la simple présence d'algèbre ne permet pas de valider une solution. Toutefois, cette importance accordée à l'algèbre démontre un certain souci pour le formalisme chez le groupe expérimental. Tout comme c'est le cas avec le groupe contrôle, c'est l'idée de généralité qui représente le deuxième type d'argument aperçu dans le plus grand nombre de commentaires.

Étant donné le peu de commentaires fournis par les élèves envers les différentes solutions lors des échanges dans le forum électronique (16 justifications en faveur d'une solution et sept en défaveur d'une solution), il est plutôt difficile de faire des comparaisons avec les raisons évoquées lors du travail sur papier. Néanmoins, il est possible de remarquer que les élèves ne font aucunement appel aux éléments mathématiques pour justifier leur classement ou pour convaincre leurs pairs. De plus, les éléments plus directement reliés à l'aspect mathématique des solutions, soit les exemples, l'idée de généralité et l'algèbre, sont peu évoqués par les élèves, que ce soit en ligne ou sur papier. Par ailleurs, il semble y avoir une prépondérance pour l'argumentation, alors que des éléments plus en lien avec la façon dont la solution est présentée (explications) et le niveau de compréhension qui lui est associée sont observés dans les commentaires des élèves. Dans quelques cas, la contrainte de temps influence également le choix des élèves.

4.6.2 2e question de recherche : habiletés en lien avec l'évaluation de solutions – Validation et invalidation de solutions

Les sections qui suivent sont réservées à l'analyse des productions d'élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental associées aux problèmes de recherche de régularités et plus précisément aux questions qui les amenaient à évaluer une ou plusieurs solutions. Une telle analyse nous permet de répondre à notre deuxième question de recherche, soit :

2. Quelle est l'influence de l'utilisation d'un forum électronique, lors de la réalisation d'activités en algèbre, sur le développement d'habiletés en lien avec l'évaluation de preuves ou de solutions chez des élèves qui en sont à leur 8e année de scolarité?

i. Quelles sont les règles du débat mathématique mobilisées par les élèves, en salle de classe (papier-crayon) ou dans un forum électronique, pour valider ou invalider une preuve ou une solution développée pour répondre à un problème algébrique?

Dans le cadre de notre expérimentation, les élèves des deux groupes ont eu à valider ou à invalider certaines solutions soumises aux questions *Act1(Eq)-1a* et *Act1(Eq)-1b*[124] ainsi qu'aux questions *Act4(Eq)-7a* et *Act4(Eq)-7b*. Notons que toutes les solutions présentées aux élèves ont été développées par leurs pairs. Une telle activité permet d'observer les règles du débat mathématique qui émergent des commentaires des élèves alors qu'ils se retrouvent en situation de validation

4.6.2.1 <u>Méthodes utilisées par les élèves (Pré(Ind)-1b) et solutions retenues et rejetées par les élèves pendant l'enseignement (Act1(Eq)-1a et Act1(Eq)-1b)</u>

Dans le premier problème qui leur est suggéré au prétest, les élèves doivent d'abord, à partir de la suite ci-dessous, trouver le nombre de cure-dents dans la dixième figure (*Pré(Ind)-1a*), puis ils doivent donner une façon qui leur permet de trouver le nombre de cure-dents pour n'importe quelle figure (*Pré(Ind)-1b*).

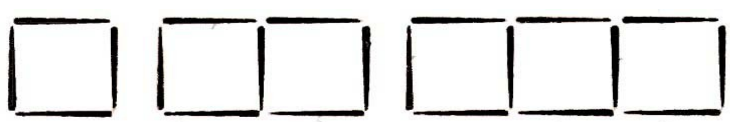


Figure nº 1 Figure nº 2 Figure nº 3

Le tableau LXXXIII (p. 264) présente les méthodes auxquelles sont associées les productions des élèves.

[124] À la question *a*, les élèves doivent identifier les preuves ou les solutions qu'ils retiennent. À la question *b*, ils doivent identifier les preuves ou les solutions qu'ils rejettent.

Tableau LXXXIII. Fréquence et pourcentage de chaque catégorie associée aux solutions des élèves de chacun des deux groupes à la question Pré(Ind)-1b

	Groupe contrôle		Groupe expérimental	
	Fréquence	%	Fréquence	%
Aucun travail	6	11	6	11
Plusieurs dessins	0	0	4	7
Un seul dessin	12	21	2	4
Explication pour réaliser un dessin	0	0	0	0
Tableau de valeurs	0	0	4	7
Règle à suivre	16	28	13	24
Calculs	0	0	1	2
Explication d'un calcul à faire	13	23	12	22
Relations entre les données ou les nbs	0	0	1	2
Expression algébrique	7	12	10	19
Inclassable	3	5	1	2
Total	57	100	54	100

Ces résultats permettent de remarquer que le travail réalisé par les élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental est sensiblement le même, sauf au niveau des élèves qui présentent un seul dessin. En effet, peu importe la méthode utilisée, seules de faibles différences peuvent être observées entre les pourcentages chez chacun des groupes. Les deux méthodes les plus utilisées sont donc les mêmes pour les deux groupes. De tels résultats sont souhaitables, puisque les groupes apparaissent comparables au départ. Les élèves optent davantage pour des solutions dans lesquelles ils précisent la règle à suivre pour passage d'une figure à la figure suivante dans un tableau de valeurs (28 % chez le groupe contrôle et 24 % chez le groupe expérimental). Chez les deux groupes, ce sont les solutions où les élèves expliquent un calcul à faire qui arrivent au deuxième rang avec, respectivement, 23 % et 22 %.

Toutes les solutions proposées par les élèves des deux groupes à cette question ont été analysées et huit d'entre elles ont été sélectionnées afin de leur être présentées lors de la première activité (activité 1). Les élèves ont pour tâche de valider (ou invalider) ces solutions, en plus d'avoir à expliquer les raisons qui les poussent à retenir ou à rejeter chaque solution. La première solution présentée aux élèves (figure 69, p. 265) met de l'avant une expression algébrique qui ne contient qu'une variable. La donnée recherchée (le nombre de cure-dents formant une figure) n'est par contre pas précisée. De plus, dans cette solution, l'élève tient à illustrer sa méthode à l'aide d'un exemple.

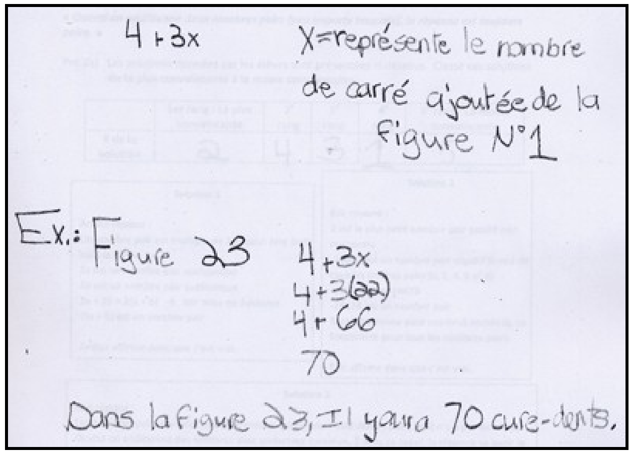


Figure 69. Première solution présentée aux élèves lors de l'activité 1 (expression algébrique et calculs)

La solution 2 (un seul dessin), présentée à la figure 70 (p. 265), présente un travail plus empirique, alors que l'élève suggère de tracer le dessin de la figure pour ensuite compter les cure-dents un à un.

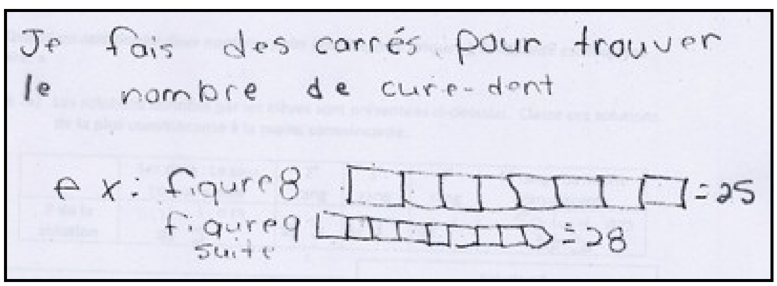


Figure 70. Deuxième solution présentée aux élèves lors de l'activité 1 (un seul dessin)

Parmi l'ensemble des solutions, une seule est incorrecte, soit la solution 3 (figure 71, p. 266). Dans cette solution, l'élève ne comprend pas que certains cure-dents peuvent servir de côté pour deux carrés (tous les cure-dents verticaux qui ne se trouvent pas à l'une des deux extrémités de la figure entrent dans cette catégorie). De plus, le dessin présenté dans l'exemple ne respecte pas la forme que doit avoir la succession des figures.

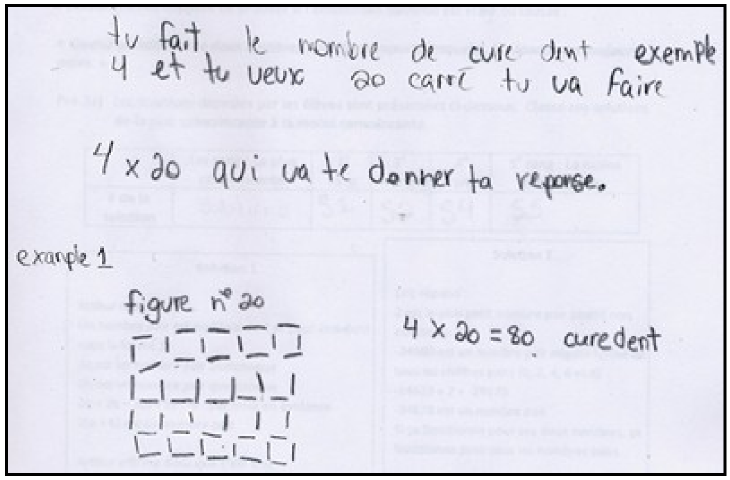


Figure 71. Troisième solution présentée aux élèves lors de l'activité 1 (solution incorrecte)

L'élève qui développe la solution 4 (figure 72, p. 266) explique différents calculs à réaliser ainsi que les raisons d'être de ces calculs.

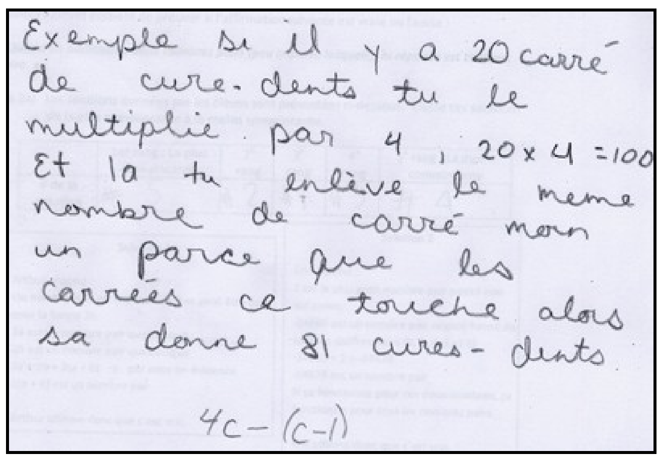


Figure 72. Quatrième solution présentée aux élèves lors de l'activité 1 (explication d'un calcul à faire)

Malgré le fait que l'élève utilise un exemple concret pour expliquer son raisonnement, la phrase (en mots) qu'il présente peut assez facilement être transformée en formule algébrique. Son raisonnement présente une idée de généralité qui n'est pas nécessairement présente dans les productions énumérées ci-dessus. De plus, l'explication est traduite en expression mathématique[125]. Il importe également de noter que le

[125] Cet ajout a toutefois été fait par la chercheuse et non par l'élève. Un élément important doit être souligné. Dans deux cas, soit pour les productions 4 (figure 74, p. 257) et 8 (figure 73, p. 257), une formule algébrique

raisonnement avancé dans cette solution est entièrement correct, mais que l'exemple présenté comporte une faute de calcul. En effet, le produit de 20 et 4 est égal à 80 et non à 100.

La solution 5 est davantage axée sur des calculs (figure 73, p. 267). L'élève reconnaît une régularité dans la façon de trouver le nombre de cure-dents, mais il ne présente pas cette façon de faire de façon générale (par exemple, avec une formule algébrique).

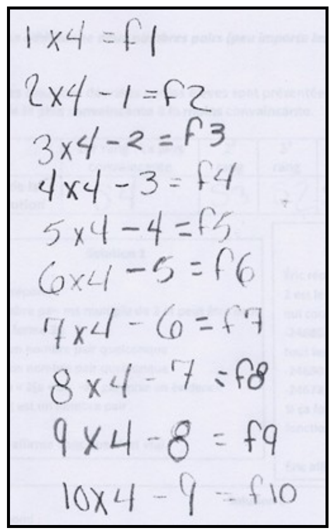


Figure 73. Cinquième solution présentée aux élèves lors de l'activité 1 (calculs)

Telle que présentée, sa solution nécessite d'écrire les expressions propres à chaque figure précédant la figure recherchée afin d'être en mesure d'écrire l'expression qui permet de trouver le nombre de cure-dents pour cette figure. Si, au contraire, l'élève avait tenté de faire un lien entre le numéro de la figure et le nombre qui est multiplié par 4 (ces deux nombres sont les mêmes) ou encore entre le numéro de la figure et le nombre soustrait dans l'expression (ce nombre est toujours inférieur d'une unité au numéro de la figure), il aurait pu présenter une façon de faire qui ne nécessitait pas d'écrire toutes les équations des figures précédentes.

---

résumant le raisonnement de l'élève a été ajoutée à la solution proposée. Ce choix s'appuie sur un questionnement présent lors du début de l'expérimentation, soit de savoir comment les élèves réagissent devant différentes expressions ou équations algébriques qui, mathématiquement parlant, sont équivalentes. Une telle interrogation aurait pu être abordée dans l'analyse de nos résultats si seules les expressions algébriques avaient été présentées aux élèves. Or, ce n'est pas le cas et il est évident que le reste de la solution proposée par l'élève risque de grandement influencer le choix des élèves. Cette modification amenée au milieu matériel doit donc être prise en considération lors de l'analyse plus approfondie des choix qu'ont faits les élèves alors qu'ils ont à retenir ou à rejeter chacune des huit solutions présentées.

Un élève présente un exemple jugé comme étant particulier pour appuyer sa réponse. En effet, dans la solution 6 (figure 74, p. 268), l'élève explique un calcul qui doit être fait. Il illustre ensuite ce calcul en présentant deux exemples. Le deuxième exemple vise à trouver le nombre de cure-dents dans la soixante-septième figure, ce qui représente en soi un numéro de figure relativement grand.

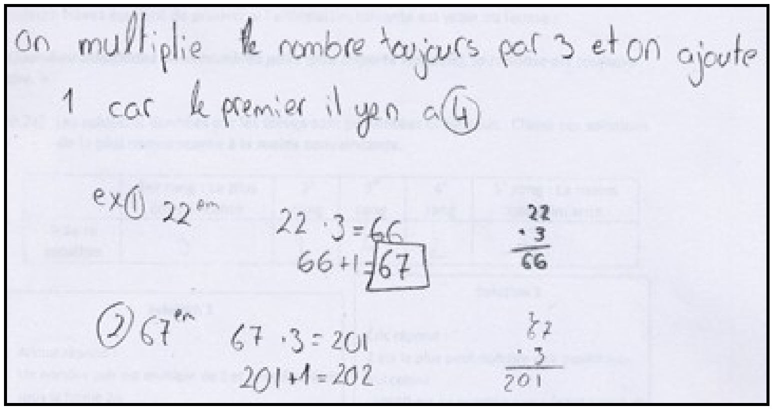


Figure 74. Sixième solution présentée aux élèves lors de l'activité 1 (explication d'un calcul à faire et calculs)

La solution 7 (figure 75, p. 268) présente également une expression algébrique, mais celle-ci diffèrent légèrement des autres expressions suggérées. En fait, l'élève présente une équation algébrique plutôt qu'une expression algébrique. Cette équation contient deux variables, soit *x*, qui représente le numéro de la figure en jeu, et *y*, servant tout simplement à indiquer ce qui est cherché, soit le nombre de cure-dents dans une figure quelconque.

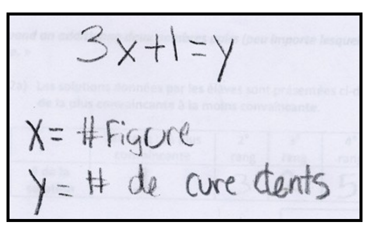


Figure 75. Septième solution présentée aux élèves lors de l'activité 1 (expression algébrique)

Finalement, la huitième solution retenue dans le cadre de cette activité contient un dessin qui sert de référent et qui permet d'imaginer la situation pour toutes les figures (figure 76, p. 269). Ce dessin est accompagné d'explications et d'une expression algébrique qui illustre de façon symbolique le raisonnement de l'élève.

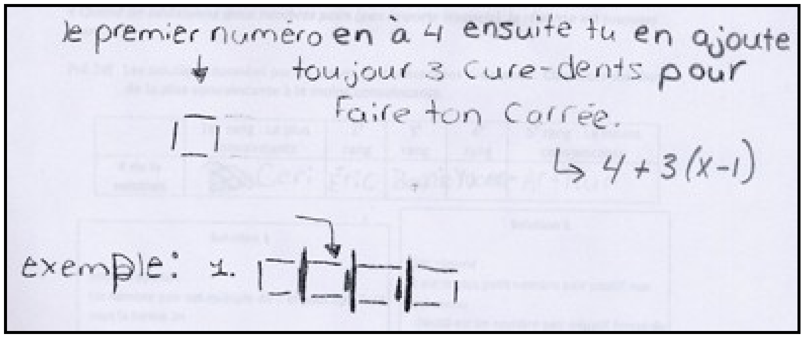


Figure 76. Huitième solution présentée aux élèves lors de l'activité 1 (explication pour réaliser un dessin, expression algébrique et un seul dessin)

Dans le cadre de la première activité, les élèves ont retenu ou rejeté les solutions ci-dessus. Le tableau LXXXIV (p. 271) présente le pourcentage d'élèves ayant retenu ou rejeté chacune des solutions. Certains élèves semblent avoir conclu qu'ils devaient seulement choisir une production d'élève, pour ainsi rejeter toutes les autres. Par conséquent, plusieurs, après avoir choisi la solution qu'ils préfèrent et justifié leur choix, ne parlent aucunement des autres solutions. Cette confusion face à la tâche à accomplir, soit accepter ou rejeter chaque solution en commentant chacun de ses choix, explique le nombre d'élèves n'ayant pas donné d'information sur l'une ou l'autre des solutions.

Les deux solutions les plus populaires chez les élèves du groupe contrôle sont la solution 7 (expression algébrique) avec 60 % et la solution 2 (un seul dessin) avec 57 %. Chez le groupe expérimental, ce sont plutôt les solutions 7 (expression algébrique) et 8 (expression algébrique et un seul dessin) qui sont préférées. Le pourcentage d'élèves qui retiennent chacune de ces solutions est respectivement de 49 % et 57 %. Les trois solutions rejetées par le plus grand nombre d'élèves dans chacun des groupes sont les mêmes, soit les solutions 1 (expression algébrique et calculs), 3 (solution incorrecte) et 4 (explication d'un calcul à faire). Cette dernière est rejetée par plusieurs élèves parce qu'elle présente une faute de calcul. Ils se limitent donc à valider les calculs, plutôt qu'à porter un jugement sur le raisonnement mis de l'avant. Arsac et al. (1992) ont observé le même phénomène, soit que les élèves cherchent à valider les calculs plutôt que la méthode utilisée. Il est aussi intéressant de remarquer que la méthode associée à une solution n'influence pas nécessairement le choix des élèves. En effet, quelques solutions contiennent une expression algébrique. L'une d'entre elles fait partie des solutions les plus populaires (solution 7, expression algébrique) alors que la deuxième (solution 1, expression algébrique et calculs) est principalement rejetée par les élèves. Ce phénomène est observable dans les deux groupes.

Tableau LXXXIV. Fréquence et pourcentage d'élèves de chacun des deux groupes qui retiennent ou rejettent chacune des solutions présentées aux questions Act1(Eq)-1a et Act1(Eq)-1b

	Groupe contrôle (n = 53)						Groupe expérimental (n = 53)					
	Retenue		Rejetée		Aucune info.		Retenue		Rejetée		Aucune info.	
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
Expression algébrique et calculs (s1)	16	30	34	64	3	6	12	23	28	53	13	24
Un seul dessin (s2) [126]	30	57	19	36	4	7	18	34	18	34	17	32
Solution incorrecte (s3)	1	2	46	87	6	11	8	15	34	64	11	21
Explication d'un calcul à faire (s4)	1	2	45	85	7	13	8	15	35	66	10	19
Calculs (s5)	16	30	29	55	8	15	14	26	14	40	18	34
Explication d'un calcul à faire et calculs (s6)	27	51	17	32	9	17	12	23	27	51	14	26
Expression algébrique (s7)	32	60	15	28	6	11	26	49	16	30	11	21
Explication pour réaliser un dessin, expression algébrique et un seul dessin (s8)	25	47	16	30	12	23	30	57	6	11	17	32

[126] Le code entre parenthèses représente le numéro associé à chaque solution lorsqu'elles sont présentées aux élèves. Ainsi, (s1) signifie « solution 1 », (s2) signifie « solution 2 », ainsi de suite.

4.6.2.1.1 Groupe contrôle.

Le tableau LXXXV (p. 272) met en évidence les préférences des élèves du groupe contrôle en ce qui a trait aux huit solutions qui leur sont présentées.

Tableau LXXXV. Fréquence et pourcentage d'élèves du groupe contrôle qui retiennent chaque solution à la question Act1(Eq)-1a (n = 53)

	Fréquence	%
Expression algébrique et calculs (s1)	16	30
Un seul dessin (s2)	30	57
Solution incorrecte (s3)	1	2
Explication d'un calcul à faire (s4)	1	2
Calculs (s5)	16	30
Explication d'un calcul à faire et calculs (s6)	27	51
Expression algébrique (s7)	32	60
Explication pour réaliser un dessin, expression algébrique et un seul dessin (s8)	25	47

Certains constats peuvent être faits à partir de ces données. Premièrement, une des solutions qui présente une expression algébrique (solution 7) est retenue par le plus grand nombre d'élèves. Cependant, la solution 1, qui contient également une expression algébrique (à laquelle des calculs ont été ajoutés) est classée au 5^{e} rang des solutions retenues par les élèves. Comment expliquer la popularité d'une solution comparativement à une autre, alors que ces deux solutions mettent de l'avant la même méthode? Cela peut assez facilement être expliqué par la forme de chacune de ces solutions. La solution 7 (expression algébrique), la plus retenue, utilise deux variables dans l'expression algébrique proposée et celles-ci sont clairement identifiées et présentées sous une forme très simple (x représente le numéro de la figure tandis que y représente le nombre de cure-dents total formant la figure). La première solution (expression algébrique et calculs), pour sa part, présente une expression où n'apparaît qu'une seule variable et cette dernière est moins facilement identifiable pour l'élève. En effet, elle représente le nombre de carrés ajoutés à la figure numéro 1.

Afin de mieux comprendre les résultats ci-dessus, voyons les explications données par les élèves pour justifier leur classement (tableau LXXXVI, p. 273). Au total, 48 commentaires sont formulés. Notons que les commentaires dans lesquels les élèves se limitent à indiquer si la solution est correcte ou non ne sont pas considérés dans cette analyse, car ils ne présentent aucune explication qui justifie le fait de retenir ou non une solution. De façon générale, il n'est pas possible d'associer un type de justification à un type de méthodes. Par exemple, les productions qui présentent une expression algébrique ne sont pas nécessairement préférées parce qu'elles présentent une solution sous forme d'algèbre.

Tableau LXXXVI. Fréquence et pourcentage de chaque raison évoquée par les élèves du groupe contrôle pour retenir une solution à la question Act1(Eq)-1a (n = 48)

	Exemples		Algèbre		Argumentation[127]	
	Fréquence	%	Fréquence	%	Fréquence	%
Expression algébrique et calculs (s1)	1	2	0	0	7	15
Un seul dessin (s2)	0	0	s/o	0	5	11
Solution incorrecte (s3)	1	2	s/o	0	2	4
Explication d'un calcul à faire (s4)	0	0	0	0	1	2
Calculs (s5)	3	6	s/o	0	1	2
Explication d'un calcul à faire et calculs (s6)	1	2	s/o	0	8	16
Expression algébrique (s7)	s/o	0	1	2	8	17
Explication pour réaliser un dessin, expression algébrique et un seul dessin (s8)	0	0	0	0	9	19
Total	6	12	1	2	41	86

À travers la majorité de leurs commentaires (86 %), les élèves du groupe contrôle ne s'appuient pas sur des arguments mathématiques pour justifier leur choix et invoquent plutôt leur niveau de compréhension, le degré de difficulté qu'ils associent à la solution, ou encore la qualité des explications présentées. Pour une grande partie des élèves, les solutions retenues sont celles qu'ils comprennent et dont l'exécution est relativement simple. Parmi l'ensemble des élèves qui présentent une justification qui est associée à l'argumentation, treize utilisent un argument d'autorité en précisant qu'ils retiennent une solution parce qu'ils ont procédé de la même façon pour répondre à la question. L'ensemble des élèves qui utilisent l'argumentation pour expliquer leur choix ne se conforment pas à la règle du débat associée aux propriétés mathématiques. Dans un autre ordre d'idée, six élèves retiennent des solutions parce qu'elles présentent des exemples, soit

[127] Comme c'est le cas lors de l'analyse des activités qui touchent le classement de différents types de preuves ou de différentes solutions, l'argumentation est inclue dans le type d'arguments pouvant être utilisés par les élèves, même si elle ne fait pas partie des règles du débat mathématique.

les solutions 1 (expression algébrique et calculs), 3 (solution incorrecte), 5 (calculs) et 6 (explication d'un calcul à faire et calculs). Or, ces élèves ne se conforment pas à la règle des exemples. Enfin, un seul élève soulève la présence de l'algèbre dans une solution, plus précisément dans la solution 7 qui présente une expression algébrique. Il indique que la solution est bonne, car « il y a des formules ». Bien que cela n'assure pas la validité d'une solution, cette appréciation de l'algèbre peut refléter un certain souci de formalisme chez l'élève.

Lors de la première activité, les élèves ont non seulement à retenir des solutions, mais ils ont également à en rejeter. Les solutions rejetées par les élèves faisant partie du groupe contrôle sont présentées au tableau LXXXVII (p. 274).

Tableau LXXXVII. Fréquence et pourcentage d'élèves du groupe contrôle qui rejettent chaque solution à la question Act1(Eq)-1b (n = 53)

	Fréquence	%
Expression algébrique et calculs (s1)	16	30
Un seul dessin (s2)	19	36
Solution incorrecte (s3)	46	87
Explication d'un calcul à faire (s4)	34	64
Calculs (s5)	29	55
Explication d'un calcul à faire et calculs (s6)	17	32
Expression algébrique (s7)	15	28
Explication pour réaliser un dessin, expression algébrique et un seul dessin (s8)	45	85

Parmi les huit solutions qui leur sont présentées, seule la solution 3 est incorrecte. Normalement, toutes les autres solutions devraient être retenues, mais certains élèves ne retiennent qu'une solution et éliminent toutes les autres. Deux solutions sont rejetées par une très grande majorité d'élèves, soit la solution 3 qui est incorrecte (87 %) et la solution 4 (explication d'un calcul à faire) qui contient une faute de calcul (85 %). Deux autres solutions sont écartées par plus de la moitié des élèves, soit la solution 1 qui fait voir une expression algébrique et des calculs (64 %) et la solution 5 qui ne contient que des calculs (55 %).

Le tableau LXXXVIII (p. 275) présente les différentes raisons mentionnées par les élèves pour rejeter une solution. Les catégories de raisons invoquées pour rejeter une solution sont les mêmes que celles invoquées pour retenir une solution. Quatre élèves (6 %) rejettent la solution qui présente une explication d'un calcul à faire ou l'une des deux solutions associées à une expression algébrique parce qu'elles ne présentent aucun exemple. Or, une preuve peut être complète (et convaincante) même si elle ne contient aucun exemple. Au total, cinquante-sept élèves (93 %) du groupe contrôle rejettent une solution en fonction d'éléments tels que le niveau de compréhension, le degré de difficulté associé à cette solution ou encore le manque de clarté des explications, même si ces éléments ne représentent pas des arguments mathématiques pour valider ou invalider une solution. Ce n'est pas parce qu'il est possible de facilement suivre le raisonnement d'un élève que sa production est automatiquement correcte. L'inverse est également vrai.

Tableau LXXXVIII. Fréquence et pourcentage de chaque raison évoquée par les élèves du groupe contrôle pour rejeter une solution à la question Act1(Eq)-1a (n = 62)[128]

	Exemples		Algèbre		Argumentation	
	Fréquence	%	Fréquence	%	Fréquence	%
Expression algébrique et calculs (s1)	0	0	0	0	9	15
Un seul dessin (s2)	0	0	1	1	4	6
Solution incorrecte (s3)	0	0	0	0	12	20
Explication d'un calcul à faire (s4)	1	1	0	0	11	18
Calculs (s5)	0	0	0	0	10	16
Explication d'un calcul à faire et calculs (s6)	0	0	0	0	3	5
Expression algébrique (s7)	3	5	0	0	3	5
Explication pour réaliser un dessin, expression algébrique et un seul dessin (s8)	0	0	0	0	5	8
Total	4	6	1	1	57	93

4.6.2.1.2 <u>Groupe expérimental (travail sur papier)</u>.

Le pourcentage d'élèves du groupe expérimental ayant retenu chacune des solutions lors de la première activité est présenté au tableau LXXXIX (p. 276).

[128] Étant donné que tous les élèves peuvent émettre plus d'un commentaire pour chaque solution, le nombre total de commentaires faisant partie de ce tableau est plus grand que le nombre d'élèves qui forme ce groupe.

Tableau LXXXIX. Fréquence et pourcentage d'élèves du groupe expérimental qui retiennent chaque solution à la question Act1(Eq)-1a (n = 53)

	Fréquence	%
Expression algébrique et calculs (s1)	12	23
Un seul dessin (s2)	18	34
Solution incorrecte (s3)	8	15
Explication d'un calcul à faire (s4)	8	15
Calculs (s5)	14	26
Explication d'un calcul à faire et calculs (s6)	12	23
Expression algébrique (s7)	26	49
Explication pour réaliser un dessin, expression algébrique et un seul dessin (s8)	30	57

Trois des quatre solutions les plus populaires auprès des élèves du groupe contrôle font également partie des quatre solutions les plus populaires chez le groupe expérimental. L'ordre est toutefois un peu modifié. Avec ce dernier groupe, c'est la solution 8 (explication pour réaliser un dessin, expression algébrique et un seul dessin) qui est choisie par le plus grand nombre d'élèves. La solution 7 (expression algébrique), retenue en plus grand nombre par le groupe contrôle, se retrouve ici au deuxième rang (49 %) tandis que la solution 2 (un seul dessin), qui suggère de tracer le dessin de la figure et de compter le nombre total de cure-dents, se retrouve au troisième rang alors que 34 % des élèves la retiennent. Chez le groupe expérimental, la solution 7 (expression algébrique) est préférée à la solution 1 (expression algébrique et calculs). La même observation est faite pour les élèves du groupe contrôle.

Alors que les deux solutions préférées par les élèves du groupe contrôle sont complètement différentes (l'une fait appel à une expression algébrique tandis que l'autre requiert de réaliser un dessin et de compter le nombre de cure-dents), les deux solutions sélectionnées par le plus grand nombre d'élèves du groupe expérimental présentent une expression algébrique. Une certaine préoccupation pour la possibilité de généraliser semble donc être plus présente chez les élèves du groupe expérimental que chez les élèves du groupe contrôle.

Les raisons qui poussent les élèves du groupe expérimental à retenir certaines solutions sont présentées au tableau XC (p. 277). Rappelons que seuls les commentaires des élèves qui présentent réellement une justification (et pas seulement une indication sur la validité de la solution) sont considérés pour cette analyse.

Tableau XC. Fréquence et pourcentage de chaque raison évoquée par les élèves du groupe expérimental pour retenir une solution à la question Act1(Eq)-1a (n = 90)

	Algèbre		Argumentation	
	Fréquence	%	Fréquence	%
Expression algébrique et calculs (s1)	4	5	6	7
Un seul dessin (s2)	s/o	0	13	14
Solution incorrecte (s3)	s/o	0	11	12
Explication d'un calcul à faire (s4)	0	0	7	8
Calculs (s5)	s/o	0	6	7
Explication d'un calcul à faire et calculs (s6)	s/o	0	5	6
Expression algébrique (s7)	11	12	12	13
Explication pour réaliser un dessin, expression algébrique et un seul dessin (s8)	0	0	15	16
Total	15	17	75	83

Contrairement à ce qui est observé chez le groupe contrôle, aucun élève du groupe expérimental ne retient une solution parce qu'elle contient des exemples. Les élèves de ce groupe semblent donc saisir le fait que quelques exemples ne sont pas suffisants pour prouver. Par surcroît, alors qu'un élève sur 48 (2 %) du groupe contrôle soulève la présence de l'algèbre comme raison pour retenir l'une des solutions, soit la solution 7 (expression algébrique), quinze commentaires sur 90 (17 %) des élèves du groupe expérimental utilisent cet argument pour retenir les solutions 1 (expression algébrique et calculs) et 7 (expression algébrique). Évidemment, la simple présence de l'algèbre ne permet pas de valider une solution. Toutefois, étant donné que le calcul sur les énoncés est souvent associé à l'utilisation de l'algèbre, entre autres parce qu'elle permet la généralisation, il est intéressant de remarquer que les élèves du groupe expérimental ont davantage fait référence à cette présence de l'algèbre pour justifier leurs choix. Dans tous les autres commentaires (83 %), les élèves utilisent l'argumentation pour appuyer leur choix de retenir une solution. Par exemple, une équipe composée de trois élèves retiennent la solution 2 (uns seul dessin), la solution 3 (solution incorrecte), la solution 7 (expression algébrique) ainsi que la solution 8 (explication pour réaliser un dessin, expression algébrique et un seul dessin) en s'appuyant sur une figure d'autorité, cette dernière étant représentée par un des membres de leur équipe. En fait, leur argument est entièrement basé sur l'expérience qu'a vécue l'un des élèves l'année précédente : « on a les solutions 2, 3, 7 et 8. On les choisit, car on les aime et que [*nom de l'élève*] a appris l'année dernière. ». Le fait de se baser sur l'expérience scolaire de cet élève les induit pourtant en erreur, car ils conservent la solution 3 qui ne respecte pas la disposition que doivent former les cure-dents.

Les élèves du groupe expérimental rejettent également certaines solutions. Le nombre d'élèves ayant rejeté chacune des solutions est présenté dans le tableau XCI (p. 278).

Tableau XCI. Fréquence et pourcentage d'élèves du groupe expérimental qui rejettent chaque solution à la question Act1(Eq)-1b (n = 53)

	Fréquence	%
Expression algébrique et calculs (s1)	28	53
Un seul dessin (s2)	18	34
Solution incorrecte (s3)	34	64
Explication d'un calcul à faire (s4)	35	66
Calculs (s5)	21	40
Explication d'un calcul à faire et calculs (s6)	27	51
Expression algébrique (s7)	16	30
Explication pour réaliser un dessin, expression algébrique et un seul dessin (s8)	6	11

Comme ce qui est observé chez le groupe contrôle, ce sont les solutions 3 (solution incorrecte) et 4 (explication d'un calcul à faire) qui sont les plus fortement rejetées par les membres du groupe expérimental. Au total, 66 % des élèves rejettent la solution 4. Rappelons que cette dernière présente un raisonnement global correct, mais qu'une faute de calcul s'y est glissée. La solution 3, qui est incorrecte, se situe au deuxième rang (64 %). Les solutions 1 (expression algébrique) et 6 (explication d'un calcul à faire et calculs) sont également rejetées par plus de la moitié des élèves.

Afin de mieux comprendre les choix des élèves du groupe expérimental, étudions plus en profondeur les raisons qu'ils donnent pour rejeter une solution (tableau XCII, p. 279).

Tableau XCII. Fréquence et pourcentage de chaque raison évoquée par les élèves du groupe expérimental pour rejeter une solution à la question Act1(Eq)-1a (n = 94)

	Exemples		Argumentation	
	Fréquence	%	Fréquence	%
Expression algébrique et calculs (s1)	0	0	20	21
Un seul dessin (s2)	0	0	10	11
Solution incorrecte (s3)	0	0	6	6
Explication d'un calcul à faire (s4)	1	1	17	18
Calculs (s5)	0	0	12	13
Explication d'un calcul à faire et calculs (s6)	0	0	16	17
Expression algébrique (s7)	0	0	7	8
Explication pour réaliser un dessin, expression algébrique et un seul dessin (s8)	0	0	5	5
Total	1	1	93	99

Un seul élève sur 94 (1 %) mentionne l'absence d'exemples comme raison pour rejeter une solution. Chez le groupe contrôle, quatre justifications sur 62 (6 %) présentent un tel argument. Il y a donc une légère différence à ce niveau entre les deux groupes. Or, comme le précisent les règles du débat mathématique, une preuve s'appuie sur des propriétés mathématiques et non sur la simple présence d'exemples. Par le fait même, l'absence d'exemples ne devrait pas consister en un argument pour rejeter une solution. Tous les autres commentaires (99 %) ne peuvent être associés à l'une ou l'autre des règles du débat mathématique. Dans la plupart des cas, les élèves soulèvent le fait qu'ils ont de la difficulté à saisir le raisonnement mis de l'avant dans une solution. Le temps requis pour réaliser certaines solutions semble également problématique. Peu importe les raisons invoquées, les élèves s'en rapport à l'argumentation et ne s'appuient pas sur des propriétés mathématiques pour justifier leurs choix.

Finalement, chez le groupe expérimental, quatre élèves qui forment une équipe précisent que la « solution 3 n'est pas bonne parce que les carrés de cure-dents sont placés en carré à la place d'être en bande ». Ce sont les seuls élèves, parmi le groupe contrôle et le groupe expérimental, qui soulèvent le non-respect de la disposition dans la solution incorrecte. De même, six des 94 élèves du groupe expérimental reconnaissent explicitement l'erreur présente dans la solution associée à l'expérience mentale, à savoir que le produit de 4 et 20 est égal à 80 et non à 100. De telles observations n'ont pas été faites chez le groupe contrôle.

Après avoir indiqué sur papier les solutions qu'ils retiennent et celles qu'ils rejettent, les élèves du groupe expérimental devaient se rendre sur le forum électronique afin de faire part de leurs choix à leurs collègues du Québec et du Nouveau-Brunswick. Malheureusement, des problèmes techniques sont survenus (il était possible de lire les messages publiés par l'administrateur du site, mais pas d'y répondre) et les élèves n'ont pas été en mesure de débattre dans le forum.

4.6.2.1.3 Observations générales à la suite de l'analyse des résultats des questions Act1(Eq)-1a et Act1(Eq)-1b.

À la suite de l'analyse des réponses soumises par les élèves aux questions *Act(Eq)-1a* et *Act1(Eq)-1b*, où ils doivent retenir et rejeter différentes solutions choisies parmi l'ensemble des solutions, certains éléments méritent d'être soulignés. Dans un premier temps, de légères différences peuvent être observées au niveau des solutions retenues par les élèves de chacun des deux groupes. Chez les élèves du groupe contrôle, les méthodes présentes dans les deux solutions les plus populaires, soit la solution 2 (un seul dessin) et la solution 7 (expression algébrique), sont différentes dans le sens où l'une est pragmatique, tandis que l'autre présente un degré de formalisme assez élevé. Pour leur part, les choix des élèves du groupe expérimental démontrent une préférence pour les solutions qui présente un certain niveau de formalisme. En effet, ce sont les solutions 8 (explication pour réaliser un dessin, expression algébrique et un seul dessin) et 7 (expression algébrique) qui sont les plus populaires. Toutefois, la solution 8 (explication pour réaliser un dessin, expression algébrique et un seul dessin) contient une composante très empirique, soit la suggestion d'ajouter trois cure-dents pour former un nouveau carré. Étant donné qu'il n'y a pas de façon de savoir lequel des éléments (l'explication pour réaliser un dessin ou la présence du dessin ou de l'expression algébrique) a le plus de poids pour les élèves du groupe expérimental, les conclusions doivent être tirées avec prudence. La présence de l'algèbre, invoquée par les élèves du groupe expérimental pour retenir une solution, laisse toutefois présager une certaine tendance vers les solutions plus formelles.

Dans environ le même pourcentage de solutions, les élèves des deux groupes ont recours à l'argumentation pour justifier leurs choix. En ce qui a trait aux règles du débat mathématique, le groupe contrôle fait davantage référence à la présence ou à l'absence d'exemples dans une solution que les élèves du groupe expérimental. Les élèves qui se réfèrent à un tel argument pour justifier leurs choix ne respectent pas la règle des exemples. D'un autre côté, les élèves du groupe expérimental accordent une plus grande importance à la présence de l'algèbre dans une solution que les élèves du groupe contrôle. Bien que la présence d'algèbre dans une solution ne soit pas garante de sa validité, il demeure que le recours à ce type d'argument démontre un souci pour le degré de généralité et de formalisme présent dans ladite solution.

4.6.3 Solutions retenues et rejetées par les élèves pendant l'enseignement (Act4(Eq)-7a et Act4(Eq)-7b)

Lors de la quatrième activité, les élèves ont d'abord eu à trouver le nombre de carreaux hachurés dans la figure n° 8 (*Act4(Ind)-7a*) et à donner une façon qui permet de trouver le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quelle figure qui est construite selon le modèle ci-dessous (*Act4(Ind)-7b*)[129]. Après avoir répondu individuellement à ces deux questions, les élèves doivent travailler en groupe afin de se prononcer sur la validité des réponses soumises par les membres de leur équipe.

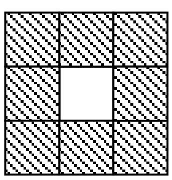


Figure n° 1

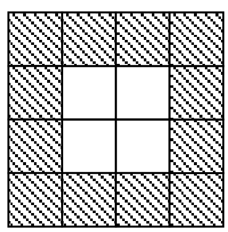


Figure n° 2

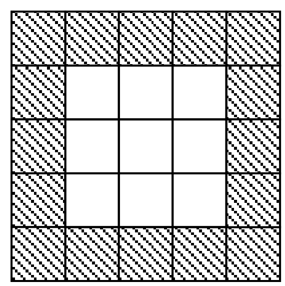


Figure n° 3

Le nombre de solutions évaluées par les élèves est beaucoup trop grand pour que nous soyons en mesure de toutes les présenter ici. Par surcroît, le pourcentage d'élèves qui retiennent ou qui rejettent une solution est lié aux solutions développées par les élèves lors du travail individuel (*Act4(Ind)-7a*). Ainsi, il n'est pas pertinent de présenter ce pourcentage. Cette section se rapporte donc uniquement aux raisons données par les élèves pour justifier leurs choix et aux liens qui peuvent être faits entre ces raisons et les règles du débat mathématique.

[129] Voir la section *4.6.1.1 Méthodes utilisées par les élèves (Act4(Ind)-7b), classement des solutions (Act4(Eq)-7c) et justifications des élèves (Act4(Eq)-7d) pendant l'enseignement* (p. 244) pour plus de détails sur les méthodes utilisées par les élèves pour trouver le nombre de carreaux hachurés dans n'importe quelle figure.

4.6.3.1 Groupe contrôle

Les élèves du groupe contrôle évoquent différentes raisons pour justifier le rejet ou non d'une solution développée par un des membres de leur équipe. Dans le cadre de cette activité, trois catégories émergent des explications des élèves, soit la présence ou l'absence d'exemples, l'idée de généralité et l'argumentation. Le tableau XCIII (p. 296) présente la totalité des raisons soulevées par les élèves du groupe contrôle qui évaluent la validité d'une solution.

Tableau XCIII. Fréquence et pourcentage de chaque raison évoquée par les élèves du groupe contrôle lors de l'évaluation correcte d'une solution aux questions Act4(Eq)-7a et Act4(Eq)-7b

	Exemples		Idée de généralité		Argumentation		Total	
	F	%	F	%	F	%	F	%
Solution retenue	8	17	1	2	22	47	31	66
Solution rejetée	1	2	1	2	14	30	16	34
Total	9	19	2	4	36	77	47	100

Les élèves proposent 47 justifications pour appuyer leur choix. Au total, 66 % des justifications touchent des solutions qui sont retenues alors que 34 % se rapportent à des solutions rejetées. Encore une fois, la majorité des commentaires (77 %) émis par les élèves concerne la compréhension que les élèves ont de la solution, la qualité des explications présentées ou toute autre forme de commentaire qui ne touche aucunement les règles du débat mathématique. Dans sept des 36 commentaires qui touchent l'argumentation, les élèves s'appuient sur le fait qu'ils ont fait le même travail que celui présenté dans la solution pour retenir cette dernière. Ce type de justification les amène parfois à conserver une solution qui présente des erreurs au niveau du raisonnement mathématique.

Les raisons qui ressortent dans 19 % des commentaires vont à l'encontre de la règle du débat mathématique qui touche les exemples. Les élèves qui présentent des commentaires qui entrent dans cette catégorie valident les calculs présentés ou, comme le commentaire suivant, insistent sur la présence d'exemples dans la solution : « on retient celui de [*nom de l'élève*] et le mien. Ils sont faciles à comprendre, ils donnent la bonne réponse et parce qu'ils donnent des exemples ». Ces élèves ne se conforment pas à la règle du débat mathématique en lien avec les exemples. Enfin, parmi l'ensemble des commentaires émis par les élèves, deux (4 %) soulèvent l'idée de généralité en précisant que la solution proposée « marche à tout coup ». Un tel commentaire démontre une sensibilité pour les solutions qui présentent un haut degré de généralité, qualité associée aux preuves intellectuelles.

4.6.3.2 Groupe expérimental

Les élèves du groupe expérimental suggèrent différentes raisons pour expliquer leur accord ou leur désaccord avec une solution soumise par un membre de leur équipe. Ces raisons sont mises de l'avant dans le tableau XCIV (p. 283).

Tableau XCIV. Fréquence de chaque raison évoquée par les élèves du groupe expérimental lors de l'évaluation correcte d'une solution aux questions Act4(Eq)-7a et Act4(Eq)-7b (n = 17)

	Algèbre	Argumentation	Total
Solution retenue	4	10	14
Solution rejetée	0	3	3
Total	4	13	17

De prime abord, il est possible d'observer que la présence d'exemples, soulevée par les élèves du groupe contrôle pour retenir ou rejeter une solution, n'apparaît pas dans le tableau du groupe expérimental. Par ailleurs, la présence de l'algèbre, qui n'était aucunement mentionnée par les élèves du groupe contrôle, est soulevée dans quatre des 17 justifications proposées par les élèves du groupe expérimental. Voici deux exemples de justifications offertes par ces élèves :

- « Celle où l'on doit utiliser l'expression algébrique. C'est la manière la plus simple et efficace. »
- « Nous retenons la façon de l'expression algébrique, car elle fonctionne très bien et est facile à utiliser. »

Enfin, parmi les 17 justifications soumises par les élèves du groupe expérimental, 13 représentent une forme d'argumentation (10 fois sur 13, les élèves conservent la solution concernée, car ils ont procédé de la même façon). Ce taux était de 7/47 chez le groupe contrôle. Lors de cette activité, les élèves du groupe expérimental utilisent donc plus l'argumentation que les élèves du groupe contrôle. Cela peut être expliqué par le fait que la plupart des élèves du groupe expérimental soumettent une solution semblable (ils sont donc plus portés à retenir les solutions qui ressemblent à la leur). Enfin, dans la catégorie « Argumentation », trois élèves rejettent explicitement une solution alors qu'elle est partiellement correcte. Dans ce cas-ci, ces trois élèves forment une même équipe et la solution associée à l'empirisme naïf est rejetée non pas à cause du raisonnement mathématique qui y est présenté, mais plutôt en raison du temps nécessaire à l'exécution de la solution (on y présente un tableau qui, lorsque le numéro de la figure recherchée est élevé, peut devenir lourd à créer). Ainsi, bien que les élèves aient pu établir correctement la validité de cette solution, leur décision de la rejeter est basée sur son efficacité pour trouver rapidement la réponse recherchée.

4.6.3.3 Observations générales à la suite de l'analyse des résultats des questions Act4(Eq)-7a et Act4(Eq)-7b

Étant donné qu'une seule classe du groupe expérimental a répondu à ces deux questions, il est plus difficile de faire des parallèles entre les résultats des deux groupes. Certains éléments peuvent tout de même être notés. Les élèves du groupe contrôle, lorsqu'ils retiennent ou rejettent une solution, utilisent principalement l'argumentation et sont grandement influencés par leur compréhension de ladite solution, par la qualité des explications qui y sont présentées ou encore par le fait qu'ils ont trouvé la même réponse que celle évaluée (ils utilisent donc l'argumentation pour justifier leurs choix). Dans les autres cas, c'est surtout la présence ou l'absence d'exemples (9 cas sur 47) qui les amènent à prendre une décision. La règle des exemples n'est donc pas respectée. Les élèves du groupe expérimental utilisent également massivement des explications qui ne sont pas associées aux règles du débat mathématique (catégorie « Argumentation »). La plupart d'entre eux (10 cas sur 17) justifient la rétention ou le rejet d'une solution parce qu'ils ont fait la même chose que ce qui est présenté. Il faut toutefois préciser que la majorité des élèves de la classe qui ont participé à l'activité ont présenté des solutions très semblables. Cela peut expliquer cette forte utilisation de l'argumentation par les élèves de ce groupe, car il peut être plus difficile de critiquer sa solution que celle d'un autre. Soulignons également que, chez les élèves du groupe expérimental, quatre des 17 solutions relèvent la présence de l'algèbre comme un argument en faveur d'une solution (aucune justification du groupe contrôle ne mentionne cela). Cette importance accordée à l'algèbre indique un certain souci pour le formalisme, souvent associé aux preuves intellectuelles et plus précisément au calcul sur les énoncés.

4.6.4 Conclusion sur la 2e question de recherche : habiletés en lien avec l'évaluation de solutions – Validation et invalidation de solutions

Lors de la première activité (*Act1(Eq)-1a* et *Act1(Eq)-1b*) et de la quatrième activité (*Act4(Eq)-7a* et *Act4(Eq)-7b*), les élèves ont évalué des solutions présentées par les membres de leur équipe et en lien avec des problèmes de recherche de régularités. L'analyse des commentaires soumis par les élèves pour justifier leur choix permet de cibler les règles du débat mathématique mobilisées par ces derniers lorsqu'ils portent un jugement sur une solution. Il est ensuite possible d'identifier si ces règles sont utilisées avec justesse ou non.

Lors des deux activités, environ le même pourcentage d'élèves de chacun des deux groupes s'appuient sur des éléments propres à l'argumentation pour retenir ou rejeter une solution. Dans les deux groupes, c'est ce type de justification qui est le plus présent dans le travail réalisé par les élèves. En ce qui a trait aux règles du débat mathématique, de façon générale, les élèves du groupe contrôle ne respectent pas la règle des exemples, car ils attribuent de l'importance à la présence ou à l'absence d'exemples dans une solution. Les élèves du groupe expérimental, pour leur part, s'attardent davantage à la présence ou à l'absence d'algèbre. Même si la simple présence d'algèbre ne permet pas de valider ou d'invalider une solution, il demeure que ces élèves démontrent un souci pour le degré de formalisme et de généralité présent dans une solution et que de telles qualités sont souvent associées au calcul sur les énoncés dans la typologie de preuves de Balacheff (1987).

5. RÉFLEXIONS ET CONCLUSION

5.1 Retour sur la première question de recherche

La première question de recherche touche le développement de preuves et se lit comme suit :

1. Quelle est l'influence de l'utilisation d'un forum électronique, lors de la réalisation d'activités mathématiques en algèbre, sur le développement d'habiletés de validation chez des élèves qui en sont à leur 8^{e} année de scolarité?

Afin de répondre à cette question, deux sous-questions ont été développées. La première cible les types de preuves développés par les élèves. La deuxième touche les règles du débat mathématique mobilisées par les élèves lorsqu'ils développent des preuves.

i. Quels types de preuves sont utilisés par les élèves lorsqu'ils se retrouvent en situation de validation algébrique en salle de classe (papier-crayon) ou dans un forum électronique?

ii. Quelles sont les règles du débat mathématique mobilisées par les élèves, en salle de classe (papier-crayon) ou dans un forum électronique, lorsqu'ils développent une preuve en lien avec un problème algébrique?

5.1.1 <u>Développement de preuves</u>

De façon générale, lorsque les élèves de chacun des deux groupes ont à valider ou à invalider un énoncé mathématique, le pourcentage de solutions d'élèves du groupe contrôle qui présentent une solution sans erreur est plus élevé que celui du groupe expérimental. Cela peut être expliqué par le type de preuves développé par les élèves de chaque groupe. En effet, les élèves du groupe contrôle développent principalement des preuves par empirisme naïf alors que chez les élèves du groupe expérimental, un passage de l'empirisme naïf à l'expérience mentale est observé. Les preuves par empirisme naïf étant les mieux réussies par les élèves de chacun des deux groupes, il est compréhensible que les élèves du groupe contrôle, qui développent davantage ce type de preuves que les élèves du groupe expérimental, connaissent plus de succès en ce qui a trait à la qualité du travail soumis.

La deuxième sous-question associée à notre première question de recherche touche les règles du débat mathématique mobilisées par les élèves lorsqu'ils développent des preuves. De prime abord, les élèves du groupe contrôle qui développent principalement des preuves par empirisme naïf pour se convaincre de la validité d'un énoncé enfreignent deux des cinq règles du débat mathématique, soit celle qui se rapporte aux propriétés mathématiques et celle en lien avec l'utilisation d'exemples pour prouver. Le même constat peut être fait pour les élèves du groupe expérimental qui, au début de l'expérimentation, présentent surtout des preuves pragmatiques. Cependant, lorsque ces élèves font un passage vers les preuves par expérience mentale, un certain souci de se baser sur différentes propriétés mathématiques pour expliquer leur raisonnement est noté dans leur travail. Il est alors possible d'affirmer qu'ils utilisent adéquatement la règle qui touche l'importance d'utiliser des propriétés mathématiques pour prouver.

5.2 Retour sur la deuxième question de recherche

La deuxième question de recherche, présentée ci-dessous, n'est non pas axée sur le développement de preuves, mais bien sur l'évaluation de preuves.

2. Quelle est l'influence de l'utilisation d'un forum électronique, lors de la réalisation d'activités en algèbre, sur le développement d'habiletés en lien avec l'évaluation de preuves ou de solutions chez des élèves qui en sont à leur 8e année de scolarité?

Répondre à cette question nécessite une étude plus approfondie des règles du débat mathématique mobilisées par les élèves lors de situations de validation. La sous-question suivante a donc été élaborée afin de nous permettre de mieux répondre à notre deuxième question de recherche.

i. Quelles sont les règles du débat mathématique mobilisées par les élèves, en salle de classe (papier-crayon) ou dans un forum électronique, pour valider ou invalider une preuve ou une solution développée pour répondre à un problème algébrique?

5.2.1 Classement de preuves

Les types de preuves principalement développées par les élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental ne sont pas nécessairement les mêmes que ceux qu'ils considèrent comme étant les plus convaincants. Alors qu'un passage des solutions pragmatiques aux solutions qui présentent un degré plus élevé de formalisme et de généralité peut être observé pour le groupe expérimental aux questions qui invitent les élèves à développer une preuve, un passage d'une préférence pour les preuves intellectuelles à une préférence pour les preuves pragmatiques est observé chez les deux groupes aux questions où les élèves ont à classer des preuves. Ce phénomène peut être expliqué de deux façons. Dans un premier temps, nous supposons que l'institutionnalisation qui a été faite dans les deux groupes est la même et que les preuves intellectuelles ont été identifiées comme celles étant les plus puissantes d'un point de vue mathématique. Il est donc possible que le poids du contrat didactique ait influencé les élèves dans leurs choix. Si tel est le cas, lors du prétest, les élèves ont privilégié les preuves qui, à leur avis, étaient préférées par leur enseignant (c'est-à-dire les preuves intellectuelles privilégiées pendant l'institutionnalisation). Un changement est ensuite survenu dans le sens où, dans le post-test, ils ont davantage favorisé les preuves qu'ils comprenaient réellement (les preuves pragmatiques). Healy et Hoyles (2000) ont d'ailleurs remarqué que les élèves ont tendance à catégoriser les preuves de cette façon, soient celles qui plaisent à leur enseignant et celles qui les convainquent réellement en tant qu'élèves. Notre deuxième conjecture repose sur le fait qu'il existe une grande différence entre produire une preuve et comprendre une preuve développée par une autre personne. En réalité, certaines preuves intellectuelles, et plus particulièrement les preuves qui consistent en un calcul sur les énoncés, sont formées d'implicites qui peuvent être difficiles à saisir par les élèves s'ils n'ont pas eux-mêmes développé cette preuve. Lorsque les élèves se retrouvent en situation de développement de preuves, ils peuvent clairement énoncer ces éléments implicites. L'utilisation du forum électronique semble donc ne pas avoir d'influence sur les preuves que les élèves favorisent lorsqu'ils ont à classer différents types de preuves, car il n'y a pas de réelles différences entre les résultats observés pour chacun des deux groupes.

Les élèves de chacun des deux groupes utilisent en majorité l'argumentation pour justifier leur classement. Lorsqu'ils mobilisent une règle du débat mathématique, c'est surtout celle des propriétés mathématique et celle des exemples qui ressortent de leurs justifications. Lors du prétest et du post-test, il est possible d'observer que le groupe contrôle a un taux d'efficacité plus élevé que le groupe expérimental avec la règle des propriétés mathématiques, tandis que le groupe expérimental a un taux d'efficacité plus élevé que le groupe contrôle avec la règle des exemples. Une deuxième observation qui peut être faite chez les deux groupes se situe aussi au niveau du taux d'efficacité. En effet, dans l'ensemble, les élèves des groupes contrôle et expérimental sont moins efficaces dans la mobilisation des règles du débat mathématique dans le post-test que dans le prétest. Cette régression peut être expliquée par le choix des élèves lorsqu'ils ont à classer des preuves. En effet, ces règles, lorsqu'elles sont utilisées adéquatement, amènent les élèves à privilégier les preuves plus intellectuelles. Étant donné que dans le post-test, les élèves préfèrent les preuves empiriques, il n'est pas surprenant que les règles mobilisées pour les retenir soient enfreintes.

Les échanges qui ont lieu dans le forum électronique semblent toutefois influencer la justesse avec laquelle les élèves utilisent les règles du débat mathématique. En réalité, les résultats démontrent que le pourcentage d'élèves qui utilisent adéquatement ces règles est plus élevé pour le groupe expérimental que pour le groupe contrôle. À notre avis, cela peut être expliqué par la diversité des messages qui sont publiés en ligne. En effet, les traces présentes dans le forum électronique permettent aux élèves d'être en contact avec différents arguments pour évaluer la pertinence d'une solution. De plus, l'exactitude de ces arguments est elle aussi évaluée dans le forum. Les élèves développent donc une certaine sensibilité aux arguments qui ont un poids mathématique et cherchent à laisser de côté ceux qui tentent de convaincre, sans pour autant fonctionner. Il est aussi possible que la pression sociale associée au fait de rendre public ses commentaires amènent les élèves à être plus rigoureux dans leur utilisation des règles du débat mathématique.

5.2.2 Évaluation de preuves

L'un des principaux éléments soulevés lors de l'analyse des résultats qui touchent l'évaluation de preuves est la valeur accordée au contre-exemple par les élèves de chacun des deux groupes. Lors de la troisième activité où les élèves du groupe contrôle et ceux du groupe expérimental doivent identifier qui de Pierre ou de Paul a raison (Pierre présente quelques exemples qui valident l'énoncé alors que Paul ne présente qu'un contre-exemple), il est possible d'observer qu'un pourcentage plus élevé d'élèves du groupe expérimental affirment, à juste titre, que Paul a raison et que Pierre à tort. Chez le groupe contrôle, près de la moitié des élèves affirment que Pierre et Paul ont raison. Ces résultats semblent influencés par le travail réalisé lors de la deuxième activité, où les élèves ont eu, entre autres, à (in)valider l'énoncé mathématique en lien avec l'expression $n \times n - n + 11$. Lors de cette activité, certains élèves des deux groupes ne trouvent pas de contre-exemple. Or, lors des échanges en ligne, quelques élèves du groupe expérimental soulignent l'existence d'un contre-exemple (si n est remplacé par 11, le nombre obtenu n'est pas premier). Par conséquent, l'exploitation du forum électronique semble non seulement avoir permis aux élèves du groupe expérimental de prendre conscience de l'existence de ce contre-exemple, mais également de sa puissance dans le domaine des mathématiques. Lorsqu'ils se sont à nouveau retrouvés devant un contre-exemple (en l'occurrence, lors de l'activité de Pierre et Paul), ils ont su correctement identifier que le contre-exemple de Paul était suffisant pour invalider l'énoncé. Les élèves du groupe contrôle, qui n'ont pas eu accès aux traces du forum électronique, se sont surtout concentrés sur la validation des calculs présentés.

Encore une fois, ce sont les justifications qui présentent une forme quelconque d'argumentation qui sont retrouvées en plus grand nombre dans les justifications des élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental. De façon générale, le groupe contrôle utilise davantage la règle des exemples et l'argumentation que le groupe expérimental. Les élèves du groupe expérimental, de leur côté, font davantage référence à la présence de l'algèbre pour retenir ou rejeter une solution. Par surcroît, les résultats qui touchent la mobilisation des règles du débat mathématique lors de l'évaluation de preuves coïncident avec les résultats obtenus dans les problèmes qui invitent les élèves à classer des preuves. En effet, il est une fois de plus possible d'observer que les élèves du groupe expérimental, dans leurs solutions, utilisent adéquatement les règles du débat dans un pourcentage plus élevé que les élèves du groupe contrôle. Ainsi, la conjecture selon laquelle la lecture des messages diversifiés publiés dans le forum électronique influence positivement l'utilisation que les élèves font des règles du débat mathématique semble de plus en plus plausible.

5.2.3 Classement et évaluation de solutions

Tout comme c'est le cas pour les problèmes qui touchent les preuves, lorsque les élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental ont à classer ou à évaluer des solutions, ils justifient principalement leurs choix en s'appuyant sur des éléments qui relèvent de l'argumentation. En ce qui a trait aux règles du débat mathématique, deux éléments émergent des analyses. Dans un premier temps, les élèves du groupe contrôle s'appuient surtout sur la présence ou l'absence d'exemples pour retenir ou rejeter une solution ou encore pour attribuer un certain rang à une solution. Ils ne respectent donc pas la règle des exemples. Dans une deuxième temps, les élèves du groupe expérimental attribuent une plus grande importance à la présence ou l'absence de l'algèbre dans une solution que les élèves du groupe contrôle. Ils démontrent donc un plus grand souci pour le niveau de formalisme et de généralité présent dans les solutions sur lesquelles ils portent un jugement.

5.3 Limites de la recherche

Un certain nombre de limites sont associées à ce projet de recherche. En premier lieu, il semble que certains problèmes proposés aux élèves gagneraient à être modifiés. En effet, les problèmes qui touchent la recherche de régularités ne permettent pas aux élèves de développer des preuves, mais plutôt de présenter des solutions dans lesquelles il est possible d'observer un certain niveau de formalisme ou de généralité. Dans le même sens, le fait de retenir ou de rejeter les différentes solutions soumises à ce type de problèmes permet plus ou moins aux élèves de mettre en pratique les règles du débat mathématique. Il serait donc plus pertinent de travailler strictement avec des problèmes qui font entièrement appel au développement et à l'évaluation de preuves. Dans le même ordre d'idée, il semble pertinent de conserver (et même d'ajouter) des problèmes qui touchent l'utilisation du contre-exemple. En effet, le fait de soumettre les élèves à des énoncés faux afin de les amener à les invalider peut faire évoluer les règles du débat mathématique.

Dans un deuxième temps, le fait de ne travailler qu'avec quatre classes (deux classes dans le groupe contrôle et deux classes dans le groupe expérimental) conduit parfois a des effectifs de petite taille, à partir desquels il n'est pas possible de généraliser les résultats des analyses. Les problèmes rencontrés en cours de route lors de l'expérimentation (par exemple, le manque de temps), qui amènent certaines classes à ne pas répondre à quelques questions, ont également pour effet de réduire les effectifs lors de nos analyses. Les résultats permettent donc davantage de discuter de la plausibilité de la conjecture selon laquelle le forum électronique a une influence sur le travail réalisé par les élèves que de conclure de façon assurée que l'exploitation du forum a une influence ou non.

Troisièmement, le nombre peu élevé de classes avec lesquelles nous travaillons pose également des problèmes quand vient le temps d'échanger dans le forum électronique. En effet, lorsqu'une des deux classes ne peut se rendre en ligne pour compléter l'activité, les élèves de l'autre classe finissent par échanger entre eux, ce qui peut être fait en salle de classe. De plus, dans le cadre de notre recherche, la première classe qui se rend sur le forum électronique n'a pas la chance de commenter les messages des autres, car aucun message n’a encore été placé en ligne. La participation d’un plus grand nombre de classes est donc recommandée.

Malgré le fait que nous ayons tenté de minimiser la disparité entre les décisions prises par les enseignants, entre autres par la remise de différents documents visant l’uniformisation des activités réalisées en salle de classe, du temps passé sur chacune des activités, du retour sur ces activités, etc., il demeure que le rôle de l’enseignant est très important en ce qui a trait aux résultats de notre expérimentation et que les actions prises par ce dernier constituent une variable qui risque d’influencer ces résultats. Ainsi, même si nous posons l’hypothèse que les enseignants ont respecté les différentes directives qui leur ont été données et que l’institutionnalisation a été la même dans l’ensemble des classes pour chacune des activités, nous concevons tout de même que les conclusions en lien avec l’influence du forum électronique doivent être tirées avec soin.

Enfin, nous ne pouvons passer outre les limites liées à l’utilisation d’un forum électronique. D’abord, il importe de réaliser que tout recours à la technologie comporte des risques. Il n’est donc pas surprenant d’avoir rencontré des perturbations avec le forum électronique, alors que les élèves se sont retrouvés dans l’impossibilité de publier un message lors de la première activité. Il faut aussi reconnaître les limites imposées par l’utilisation du forum électronique en ce qui a trait aux registres disponibles pour les élèves pour représenter et formuler leurs raisonnements. En effet, bien que les élèves aient accès à un menu qui leur permette d’insérer des tableaux ou des symboles mathématiques à leur message, il est impossible pour eux de tracer des figures, des flèches, etc. Il est vrai qu’il leur est possible d’insérer une image dans un message, mais force est d’admettre que les étapes à suivre sont peu conviviales (ils doivent copier l’adresse URL de l’endroit où se trouve leur image dans leur message).

5.4 Un dernier mot sur le forum électronique

Lors des échanges dans le forum électronique, les élèves du groupe expérimental ont tendance à moins développer leur pensée que lors du travail sur papier. Cela est dû au fait que bien souvent, la tâche à accomplir en ligne ressemble beaucoup à celle déjà complétée sur papier. D’après le commentaire d’un enseignant recueilli lors d’une entrevue, certains élèves trouvent que le travail en ligne est trop redondant. Ainsi, la motivation engendrée par l’exploitation du forum électronique est un peu contrecarrée par la répétition de certaines questions posées aux élèves. Malgré cela, les échanges qui ont lieu dans le forum électronique permettent d'observer des phénomènes qui nous échappent sur papier. En effet, en ligne, il est possible de remarquer une certaine évolution par rapport à une même question. Par exemple, dans le forum électronique, quelques élèves précisent que tel ou tel exemple vu en ligne leur permet de comprendre, alors que la première réponse qu'ils avaient soumise était erronée. Une analyse plus approfondie des échanges en ligne nous permet également de remarquer une amélioration au niveau de la qualité des messages publiés. Notamment, au début des échanges, quelques élèves se contentent de dire qu'il existe un contre-exemple (sans pour autant préciser en quoi il consiste). Après quelques messages, s'ils se rendent compte que certains élèves ne sont pas encore convaincus, ils développent leur idée et présentent explicitement ce contre-exemple. Les échanges les amènent donc à préciser leur solution. Ainsi, quoique certaines données soient absentes du forum électronique (comparativement au travail d'équipe en salle de classe), ce genre d'échanges permet tout de même l'apparition d'informations pertinentes qui nous permettent de mieux comprendre le raisonnement des élèves et qui leur permettent aussi de mieux comprendre.

Somme toute, le forum électronique semble enrichir la situation de formulation en favorisant les interactions. Dans certains cas, il semble représenter un levier pour l'aspect social. De plus, lors du travail sur papier, ce sont strictement les résultats des échanges en classe qui sont recueillis. Dans le forum électronique, des interactions écrites (qui ne consistent pas nécessairement au résultat final) sont enregistrées. Le forum peut donc représenter un moteur intéressant à la conceptualisation. Ainsi, à la lumière de ce qui précède, il semble pertinent de poursuivre les recherches afin de continuer l'exploration de l'influence que peut avoir l'exploitation d'un outil de communication en ligne et plus précisément l'utilisation d'un forum électronique sur les habiletés de validation algébrique et sur les habiletés en lien avec l'évaluation de preuves.

5.5 Perspectives de recherche

Les résultats obtenus lors de notre expérimentation nous amènent à nous questionner sur certains éléments et à identifier des avenues de recherche qui s'avèrent intéressantes. En premier lieu, nos résultats laissent entrevoir que la valeur explicative des arguments semble influencer les élèves lorsqu'ils ont à classer des preuves ou lorsqu'ils ont à en retenir ou à en rejeter. Cela peut expliquer en partie la préférence des élèves, observée à quelques reprises, pour l'expérience mentale. Il pourrait donc être intéressant de porter une attention particulière à cet aspect lors du choix des preuves à proposer aux élèves. En effet, lors de notre expérimentation, quelques preuves présentées aux élèves, entre autres les preuves qui constituent un exemple générique, ne contiennent aucun argument explicatif qui permet de saisir leur caractère de généralité. Afin que les élèves évaluent non pas leur compréhension de la preuve, mais plutôt sa valeur d'un point de vue mathématique, il semble nécessaire d'accorder une attention particulière à la composante explicative des preuves.

Deuxièmement, la majorité des élèves ne se servent pas d'arguments mathématiques pour expliquer pourquoi ils retiennent une preuve parmi plusieurs. Ils se basent plutôt sur le degré de simplicité de cette preuve ou sur la présence et la qualité des explications présentées. Or, il importe pour les élèves de développer des habiletés en évaluation de preuves qui dépassent de tels arguments. Il y a alors lieu de se demander si ce recours à ces éléments repose sur la conviction que ce type de justification a un réel poids en mathématiques ou tout simplement sur le fait que les élèves ne savent pas quelle autre raison utiliser pour expliquer leur choix. Faut-il tenter de trouver des moyens pour développer des habiletés en évaluation de preuves avec les élèves ou serait-il préférable de travailler avec des élèves plus âgés qui ont davantage touché la notion de preuves et qui ont, que ce soit directement ou indirectement, été en contact avec les règles du débat mathématique? Les justifications données par ces élèves seraient-elles plus riches? Le fait de modifier notre population de cette façon permettrait de voir si les élèves sont en mesure de dépasser l'argumentation lorsqu'ils ont été plus sensibilisés à la notion de preuve.

Dans un troisième temps, il serait pertinent d'exploiter davantage la communauté du CAMI qui existe présentement, afin de travailler avec des élèves qui utilisent déjà le site lors de certains de leurs cours ainsi qu'à l'extérieur des heures de classe. Cette proposition est fondée sur le fait que lors de notre expérimentation, le caractère pérenne des échanges en ligne n'a que très peu été exploité, car un seul élève a utilisé le forum électronique à l'extérieur des heures de classe et peu d'élèves ont participé à des discussions entamées lors d'un autre cours. Il est donc souhaité, dans une recherche future, d'exploiter davantage les particularités du forum et plus particulièrement les échanges qui ont lieu sur un certain laps de temps.

Enfin, l'exploitation du forum électronique avec un plus grand nombre de classes semble nécessaire pour nous permettre de généraliser davantage nos résultats. Cependant, il faut être prudent. Bien que l'augmentation du nombre d'élèves qui participent aux échanges en ligne accroisse les chances, pour un élève, de lire des messages qui ne proviennent pas de ses collègues de classe, il demeure qu'un nombre trop élevé de messages risque de créer une surcharge d'informations. Le nombre de participants représente donc une variable importante à considérer dans le cadre d'autres projets.

BIBLIOGRAPHIE

Adler, A. et Adler, P. (1987). *Membership roles in field research (Sage university paper series on qualitative research methods)* (Vol. 6). Beverly Hills: Sage.

Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y. et Mante, M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Lyon: Presses universitaires de Lyon.

Arsac, G. et Mante, M. (1996). Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 21-43.

Arsenault, N., Bélanger, M., Blanchet, M., Bourassa, F., Desnoyers, P., Doré, K., Fortin, L., Gerardin, P., Grégoire, G., Jobin, I., Laferriere, T., Legault, F., Massicotte, É., Ménard, L., Moisan, P., Paquin, H. et Tremblay, M. (2001). *Gestion d'une classe, communauté d'apprentissage*: PROTIC-FCAR-TACT.

Bachelard, G. (1947). *La formation de l'esprit scientifique* (13e éd.). Paris: Librairie philosophique J. Vrin.

Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en didactique des mathématiques, 3*(3), 261-304.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics,* (18), 147-176.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège.* Thèse de doctorat inédite, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Balacheff, N. (1998, 25-26 mai). *Éclairage didactique sur les EIAH* Actes du Colloque annuel de la Société de Didactique des mathématiques du Québec, Concordia University, Montréal, 11-42.

Balacheff, N. (1999). Is Argumentation an Obstacle? Invitation to a Debate. France: Preuve: International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.

Baughman, C. (1997). Computer Country. *Bread Loaf Rural Teacher Network Magazine,* 2-3.

Bednarz, N. et Dufour-Janvier, B. (1992). *L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves.* Actes Colloque international, École Normale Supérieure de Marakech, 21-40.

Bednarz, N. et Dufour-Janvier, B. (1993). L'algèbre comme outil de résolution de problème : filiations et ruptures avec l'arithmétique, *Perspectives de recherches sur l'émergence et le développement de la pensée algèbrique*:article présenté au CIRADE, Montréal, 25 p.

Benson, C. (1997). Networking across Boundaries. *Bread Loaf Rural Teacher Network Magazine,* 1.

Blaney, V. (1995, avril). L'école plus ouverte sur le monde. *Journal du secteur francophone du ministère de l'Éducation,* p. 1-2.

Bodzin, A. M. (2001, mars). *Factors That Promote and Inhibit Discourse With Preservice Teachers on a Non-Restrictive, Public Web-Based Forum* Actes de la 12th International Conference of the Society for Information Technology & Teacher Education International Conference, Orlando, FL., 2973-2978.

Brêchet, M. (2003). Une approche du langage algébrique. *MATH-ECOLE*(205).

Breuleux, A., Laferrière, T. et Bracewell, R. (1998, mars). *Networked Learning Communities in Teacher Education.* Actes de la 9th International Conference of the Society for Information Technology and Teacher Education, Charlottesville, VA, 1171-1175.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1986a). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1986b). *La relation didactique : le milieu* Actes de la IVième École d'Été de didactique des mathématiques, IREM Paris 7, 54-68.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 309-336.

Brousseau, G. (1995). *L'enseignant dans la théorie des situations didactiques* Actes de la VIIIième École d'Été de Didactique des Mathématiques, 17-28.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, éditions.

Brousseau, G. (2003). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. Consulté le 29 octobre 2006, du site Internet http://math.unipa.it/~grim/Gloss_fr_Brousseau.pdf

Brousseau, G. (n.d). Glossaire de la didactique des mathématiques. 131-142.

Brousseau, G. (n.d.). *La théorie des situations didactiques (à paraître dans Interaction mathématiques, Genève)*. Consulté le 30 janvier 2006, du site Internet http://dipmat.math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf

Brousseau, G. et Warfield, V. M. (1999). The Case of Gaël. The Study of a Child with Mathematical Difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior, 18*(1), 7-52.

Brown, A. L. et Campione, J. C. (1996). Guided Discovery in a Community of Learners. Dans K. McGilly (éd.), *Classroom Lessons: Integrating cognitive theory and classroom practice* (p. 229-270). Cambridge: MIT Press/Bradford Books.

Brown Yolder, M. (2003). Seven Steps to Successful Online Learning Communities. *Learning & Leading with Technology, 30*(6), 14-21.

Carboni, L. W. (1999, janvier). *How Might an Online Discussion Forum Support Teachers' Professional Development in Mathematics? A First Look.* Actes de l'Annual Meeting of the Association of Mathematics Teacher Educators, Chicago, IL., 1-13.

Chazan, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Chazan, D. (1995). *Where Do Student Conjectures Come From? Empirical Exploration in Mathematics Classes. Craft Paper 95-8* (Reports - Research Speeches/Meeting Papers): National Center for Research on Teacher Learning, East Lansing, MI.

Clements, D. H. et Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. Dans D. A. Grouws (éd.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 420-464). New York Maxwell Macmillan International.

Cobb, P. (1994). Where is the Mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher, 23*(7), 13-20.

Cobb, P., Perlwitz, M. et Underwood, D. (1994). Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation, 20*(1), 41-61.

Curtis, D. D. et Lawson, M. J. (2001). Exploring Collaborative Online Learning. *Journal for Asynchronous Learning Networks, 5*(1), 21-34.

Cyr, S. (2006). *Pourquoi et comment enseigner la preuve au secondaire, qu'en pensent nos futurs maîtres?* : Éditions Bande Didactique.

De Serres, M. et Groleau, J.-D. (1997). *Mathématiques et langages*. Montréal: Collège Jean-de-Bréfeuf.

Deret, D. (1998). *Pensée logique, pensée psychologique. L'art du raisonnement*. Paris: L'Harmattan.

Dillenbourg, P. et Schneider, D. (1995). *Collaborative Learning and the Internet* Actes de l'International Conference on Computer-Assisted Instruction 95, Université de Genève, Suisse.

Downes, S. (2004). Educational Blogging. *EDUCAUSE Review, 39*(5), 14-26.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny Can't Prove (with Apologies to Morris Kline). *Educational Studies in Mathematics, 38*(1-3), 85-109.

Drijvers, P. (2000). Students Encountering Obstacles Using a CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5*(3), 189-209.

Duroux, A. (1983). La valeur absolue. Difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit x, 3*, 43-67.

Duval, R. (1990). Pour une approche cognitive de l'argumentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 3*, 195-221. Strasbourg : IREM de Strasbourg.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics, 22*(3), 233-261.

Dvora, T. et Dreyfus, T. (2004, 14-18 juillet). *Unjustified Assumptions Based on Diagrams in Geometry* Actes de la 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 311-318.

El Bouazzaoui, H. (1988). *Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction.*, Université Laval, Québec.

Elchuck, L., Hope, J., Scully, B., Scully, J., Small, M. et Tossell, S. (1997a). *Interactions 7*. Montréal: Les Éditions de la Chenelière inc.

Elchuck, L., Hope, J., Scully, B., Scully, J., Small, M. et Tossell, S. (1997b). *Interactions 8*. Montréal: Les Éditions de la Chenelière inc.

English, L. D. (2004). Mathematical and Analogical Reasoning in Early Childhood. Dans L. English (éd.), *Mathematical and Analogical Reasoning of Young Learners* (p. 1-21). New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Freiman, V. et Lirette-Pitre, N. (2008). Building a virtual learning community of problem solvers: example of CASMI community *The International Journal on Mathematics Education, 41*(1-2), 245-256.

Friel, S. N. (1999, janvier). *MaSTech: Mathematics, Science, and Technology.* Actes de l'Association of Mathematics Teacher Educators, Chicago, IL., 1-30.

Galbraith, P. L. (1981). Aspects of Proving: A Clinical Investigation of Process. *Educational Studies in Mathematics, 12*(1), 1-28.

Gooch, R. (1997). Rural Teachers and Students: Connecting and Communicating. *Bread Loaf Rural Teacher Network Magazine*, 4-6.

Grant, C. A. et Scott, T. M. (1996, décembre). *The "Superhighway": A Revolutionary Means of Supporting Collaborative Work.* Actes de l'International Online Information Meeting, Londre, Angleterre, 299-304.

Gulati, S. (2008). Compulsory Participation in Online Discussions: is this Constructivism or Normalisation of Learning? *Innovations in Education and Teaching International, 45*(2), 183-192.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2), 5-23.

Healy, L. et Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Hiltz, S. R. (1998). Collaborative Learning in Asynchronous Learning Networks: Building Learning Communities, invited address at WEB98. Orlando, Floride.

Hoyles, C. (2008). Technology and mathematics education, *11th International Congress on Mathematical Education (ICME)*. Mexico.

Institut universitaire de formation des maîtres. (n.d.). *Une typologie des situations didactiques*. Consulté le 23 octobre 2006, du site Internet http://www.reunion.iufm.fr/Dep/Mathematiques/PE1/Resources/TypologieSituations.pdf

Johnson, G. (2006). Synchronous and Asynchronous Text-Based CMC in Educational Contexts: A Review of Recent Research. *TechTrends, 50*(4), 46-53.

Johnson, R. et Johnson, D. (1988). Cooperative Learning. Two heads *learn* better than one. *In Context. A Quarterly Of Humane Sustainable Culture*(18), 34. Consulté le 15 mars 2006 du site Internet http://www.context.org/ICLIB/IC2018/Johnson.htm.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A. et Mogill, A. T. (1997). A Framework for Assessing and Nurturing Young Children‘s Thinking in Probability. *Educational Studies in Mathematics 32*(2), 101-125.

Joslin, P. et Gerlovich, J. (1992, octobre). *PSInet: A Teleconferencing Network for Teachers.* Actes de l'Annual Rural and Small Schools Conference, Manhattan, KS, 1-6.

Kleiner, I. (1991). Rigor and Proof in Mathematics: A Historical Perspective. *Mathematics Magazine, 64*(5), 291-314.

Koufman-Frederick, A., Lillie, M., Pattison-Gordon, L., Watt, D. L. et Carter, R. (1999). *Electronic Collaboration: A Practical Guide for Educators.* Rhode Island, États-Unis.

Laferrière, T., Bracewell, R. et Breuleux, A. (2001). *La contribution naissante des ressources et des outils en réseau à l'apprentissage et à l'enseignement dans les classes du primaire et du secondaire*: TeleLearning Network Inc.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

LeBlanc, M. et Freiman, V. (sous presse). *Mentoring Enrichment Mathematical Activities in an Online Challenging Problem Solving Environment: the CAMI project.* Actes de l'Interdisciplinarity for the 21st Century: Proceedings of the 3rd International Symposium on Mathematics and its Connections to Arts and Sciences, Charlotte, NC.

Lemaire, P. (2005). *Psychologie cognitive*. Bruxelles: Éditions De Boeck.

Lithner, J. (2006). *A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning*. Umeå: Umeå universitet.

Little-Reynolds, L. et Takacs, J. (1998, mars). *Distance Collaboration and Technology Integration between Two Institutions.* Actes de SITE 98: Society for Information Technology & Teacher Education International Conference, Washington, DC, 366-369.

Lunsford, K. J. et Bruce, B. C. (2001). Collaboratories: Working Together on the Web. *Journal of Adolescent & Adult Literacy, 45*(1), 52-58.

Marchand, P. et Bednarz, N. (2000). Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes. *Bulletin AMQ, XL*(4), 15-24.

Margolinas, C. (1989). *Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques.* Thèse de doctorat inédite, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, Grenoble, France.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, éditions.

Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. Dans C. Margolinas (éd.), *Les débats de didactique des mathématiques* (p. 89-102). Grenoble: La Pensée Sauvage, éditions.

Margolinas, C. (2004). Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques. Habilitation à diriger des recherches: Université de Provence, France.

Martin, T. S. et McCrone, S. S. (2001, 18-21 octobre). *Investigating the Teaching and Learning of Proof: First Year Results* Actes de la 23rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Snowbird, Utah, 585-594.

Mary, C. (1999). *Place et fonctions de la validation chez les futurs enseignants des mathématiques au secondaire.* Thèse de doctorat inédite, Université de Montréal, Montréal.

Maurino, P. (2007). Online Asynchronous Threaded Discussions: Good Enough to Advance Students through the Proximal Zone of Activity Theory? *TechTrends, 51*(2), 46-49.

McCrone, S. S., Martin, T. S., Dindyal, J. et Wallace, M. L. (2002, 26-29 octobre). *An Investigation of Classroom Factors That Influence Proof Construction Ability* Actes de la 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Athens, GA, 1701-1712.

Miles, M. B. et Huberman, A. M. (2003). *Analyse des données qualitatives* (M. H. Rispal, Trans. 2e éd.). Bruxelles: Éditions De Boeck.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (2001). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire. Enseignement primaire*. Consulté le 20 mars 2006, du site Internet http://www.mels.gouv.qc.ca/DGFJ/dp/programme_de_formation/primaire/pdf/prform2001nb/prform2001nb.pdf

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (2005). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Consulté le 20 mars 2006, du site Internet http://www.mels.gouv.qc.ca/DGFJ/dp/programme_de_formation/secondaire/prformsec1ercycle.htm

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise, secondaire, 2e cycle. Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie (version approuvée)*.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick. (1992a). *Mathématiques 3041 : Programme d'études*. Fredericton: Direction des programmes d'études.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick. (1992b). *Mathématiques 3051 : Programme d'études*. Fredericton: Direction des programmes d'études.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick. (1993). *Mathématiques 3042 : Programme d'études*. Fredericton: Direction des programmes d'études.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick. (2000a). *Programme d'études : Mathématiques 1re année* (version provisoire). Fredericton: Direction des services pédagogiques.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick. (2000b). *Programme d'études : Mathématiques 2e année* (version provisoire). Fredericton: Direction des services pédagogiques.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick. (2000c). *Programme d'études : Mathématiques 7e année* (version provisoire). Fredericton: Direction des services pédagogiques.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick. (2000d). *Programme d'études : Mathématiques 8e année* (version provisoire). Fredericton: Direction des services pédagogiques.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick. (2004a). *Programme d'études : Mathématiques 3e année* (version provisoire). Fredericton: Direction des services pédagogiques.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick. (2004b). *Programme d'études : Mathématiques 4e année* (version provisoire). Fredericton: Direction des services pédagogiques.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick. (2004c). *Programme d'études : Mathématiques 30231 / 30232* (version provisoire). Fredericton: Direction des services pédagogiques.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick. (2005a). *Programme d'études : Mathématiques 5e année* (version provisoire). Fredericton: Direction des services pédagogiques.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick. (2005b). *Programme d'études : Mathématiques 6e année* (version provisoire). Fredericton: Direction des services pédagogiques.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick. (2005c). *Programme d'études : Mathématiques 30131* (version provisoire). Fredericton: Direction des services pédagogiques.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick. (2005d). *Programme d'études : Mathématiques 30311 / 30312* (version provisoire). Fredericton: Direction des services pédagogiques.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick. (2005e). *Programme d'études : Mathématiques 30321* (version provisoire). Fredericton: Direction des services pédagogiques.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick. (2006). *Programme d'études : Mathématiques 30411* (version provisoire). Fredericton: Direction des services pédagogiques.

Miyazaki, M. (2000). Levels of Proof in Lower Secondary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 41*(1), 47-68.

National Council of Teachers of Mathematics. (2005). *More and Better Mathematics for All Students*. Consulté le 11 novembre 2005, du site Internet http://www.nctm.org/

Norton, S. J. (2005). *The Construction of Proportional Reasoning.* Actes de la 29th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Melbourne, 17-24.

Ocker, R. J. et Yaverbaum, G. J. (1999). Asynchronous Computer-mediated Communication versus Face-to-face Collaboration: Results on Student Learning, Quality and Satisfaction *Group Decision and Negociation, 8*(5), 427-440.

Ocker, R. J. et Yaverbaum, G. J. (2001). Collaborative Learning Environments: Exploring Student Attitudes and Satisfaction in Face-to-Face and Asynchronous Computer Conferencing Settings. *Journal of Interactive Learning Research, 12*(4), 427-448.

Palinscar, A. S. (1998). Social constructivist perspectives on teaching and learning. *Annual Review of Psychology, 49*, 345-375.

Pellerey, M. (1987). Pour un cadre de référence du thème. L'erreur est liée à la création; la faute, à la mémoire. *Prospectives*(3), 115-116.

Pfannkuch, M. et Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. Dans D. Ben-Zvi et J. Garfield (dir.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

René de Cotret, S. (1998). Quelques questions soulevées par l'adoption d'une perspective “bio-cognitive” pour l'étude de relations du système didactique. *Séminaire DidaTech, Didactique et technologies cognitives en mathématiques, Séminaire 184, Laboratoire Leibniz-IMAG, 1997*, 161-178.

René de Cotret, S. (1999). Perspective bio-cognitive pour l'étude de relations didactiques. Dans G. Lemoyne et F. Conne (dir.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (p. 103-120). Montréal: Presses de l'Université de Montréal.

Richardson, W. (2004). Blogging and RSS - The "What's It?" and "How to" of Powerful New Web Tools for Educators. *Multimedia & Internet@Schools, 11*(1).

Ripoll, T. (2006). Raisonnement et résolution de problèmes. Dans G. Amy, M. Piolat et J.-L. Roulin (dir.), *Psychologie cognitive* (2e éd.). Paris: Bréal.

Salomon, G. (1999). Computer Mediated Conferencing in Large Scale Management Education. *Open Learning: The Journal of Open and Distance Learning, 14*(2), 34-43.

Sarason, S. B. (1984). If It Can Be Studied or Developed, Should It Be? *American Psychologist, 39*(5), 477-485.

Sierpinska, A. (2005, 3 - 4 mai). *"Papa veut que je raisonne...". Quelques réflexions sur la valeur du raisonnement mathématique dans la formation de futurs citoyens et professionnels* Actes du GDM 2005 : Raisonnement mathématique et formation citoyenne, Montréal, 197-215.

Simon, M. A. (2000). Reconsidering Mathematical Validation in the Classroom. *Research Reports, 4*, 161-167.

Sowder, L. et Harel, G. (1998). Types of Students' Justifications. *Mathematics Teacher, 91*(8), 670-675.

Spencer, H. (1866). *Education. Intellectual, Moral, and Physical.* New York: D. Appelton and Company.

Steinbring, H. (2000, July 23-27). *The Genesis of New Mathematical Knowledge as a Social Construction* Actes de la 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Hiroshima, Japon, 177-184.

Teles, L. et Duxbury, N. (1991). *The Networked Classroom: An Assessment of the Southern Interior Telecommunications Project (SITP)*. Colombie-Britannique: Simon Fraser University, Burnaby (British Columbia). Faculté d'éducation.

Tutty, J. I. et Klein, J. D. (2008). Computer-Mediated Instruction: A Comparison of Online and Face-to-Face Collaboration. *Educational technology research and development, 56*(2), 101-124.

Van Dormolen, J. (1977). Learning to Understand What Giving a Proof Really Means, *Educational Studies in Mathematics* (Vol. 8, p. 27-34).

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*. Orlando: Academic Press, Inc.

Vézina, N. et Langlais, M. (2002). Résolution de problèmes, communication mathématique et TIC : l'expérience du projet CAMI. *Nouvelles de l'AEFNB, 33*(5), 9-12.

Vieillard-Baron, E. (2008). Un forum pour apprendre et faire des mathématiques ensemble. *Repères - IREM, 73*, 95-100.

Voigt, J. (1994). *Negotiation of Mathematical Meaning and Learning Mathematics.* (No. 00131954).

Vygotski, L. (1986). *Pensée et langage*. Paris: Éditions Sociales Messidor.

Weber, K. (2001). Student Difficulty in Constructing Proofs: The Need for Strategic Knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101-119.

Zhao, Y. et Rop, S. (2001). *A Critical Review of the Literature on Electronic Networks as Reflective Discourse Communities for Inservice Teachers. CIERA Report.* (No. 3-014). New Orleans, LA.

ANNEXE 1

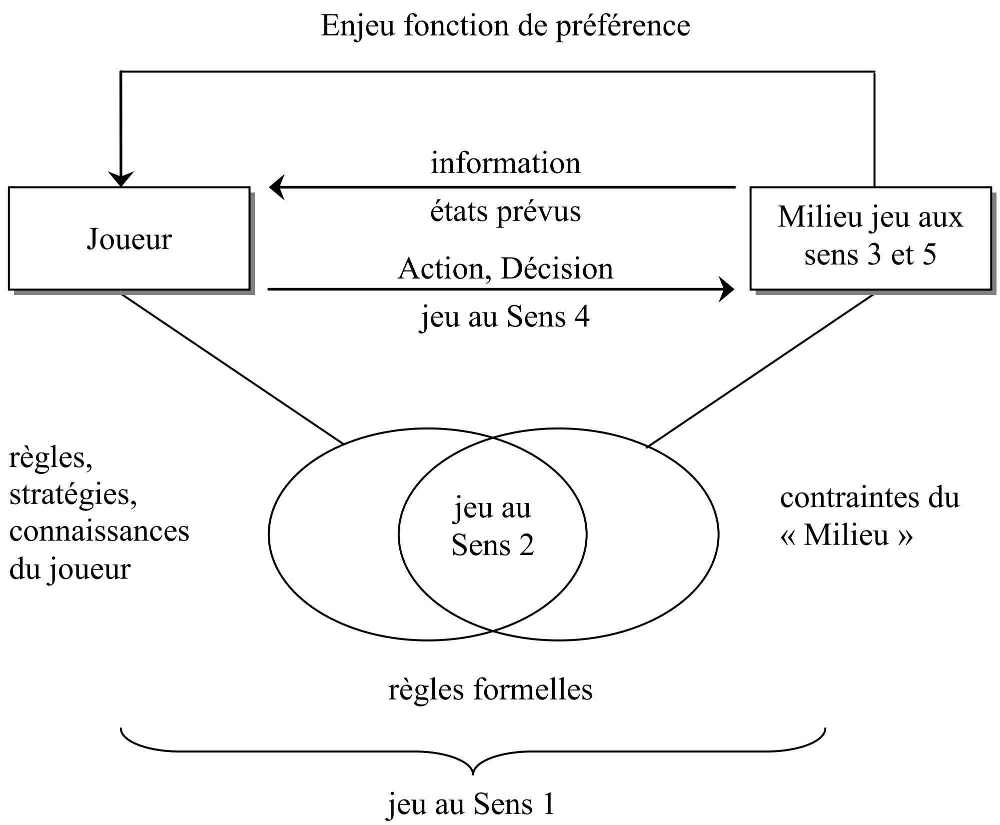
Objectifs à atteindre par les élèves du N.-B. en ce qui a trait à l'utilisation des TIC

De la maternelle à la 2e année, l'élève doit pouvoir utiliser l'ordinateur de façon responsable en respectant les consignes de base. Il doit utiliser les principales composantes de l'ordinateur ainsi que les fonctions de base du système d'exploitation. Il doit également être initié à la navigation et à la communication électronique ainsi qu'à la recherche d'information. Enfin, il est en mesure d'utiliser un logiciel de dessins et de traitement de texte.	**De la 3e à la 5e année,** l'élève doit pouvoir utiliser les TIC de façon responsable en développant des attitudes positives face à l'utilisation des TIC dans ses responsabilités scolaires. Il doit maîtriser les principales fonctions de l'ordinateur et élargir son champ d'utilisation en explorant divers périphériques. Il doit également naviguer et communiquer à l'aide de support électronique ainsi que rechercher de l'information. Enfin, il est en mesure d'utiliser un logiciel de dessins et de traitement de texte et d'être initié à un tableur, à un logiciel de présentation, à un logiciel de traitement d'images et d'édition de page Web.	**De la 6e à la 8e année,** l'élève doit pouvoir utiliser les TIC de façon responsable en démontrant de la confiance et un esprit critique face à l'utilisation des TIC dans ses responsabilités scolaires. Il doit appliquer des stratégies de résolution de problèmes techniques de base et utiliser l'ordinateur, son système d'exploitation ainsi que plusieurs périphériques avec autonomie. Il doit également naviguer et communiquer de façon autonome à l'aide de support électronique ainsi que rechercher de l'infirmation. Il doit maîtriser un logiciel de dessins et de traitement de texte et utiliser un logiciel de traitement d'images et d'édition de page Web. Enfin, il est en mesure d'utiliser un tableur et un logiciel de présentation et d'être initié à un logiciel de traitement de données, de sons et de vidéos.	**De la 9e à la 12e année,** l'élève doit pouvoir utiliser les TIC de façon responsable en démontrant de la confiance et un esprit critique face à l'utilisation des TIC dans ses responsabilités scolaires. Il doit intégrer les TIC de façon efficace dans ses activités scolaires et appliquer des stratégies de résolution de problèmes de base de façon autonome. Il doit également naviguer, rechercher, communiquer, présenter et gérer l'information de façon appropriée avec autonomie et efficacité. Il doit maîtriser un logiciel de dessins et de traitement de texte ainsi que maîtriser une variété de logiciels lui permettant de traiter l'image et le son et d'éditer des pages Web. Enfin, il doit utiliser un tableur, un logiciel de présentation, de traitement de données, de son et de vidéos et être initié à un logiciel de gestion de temps et de projets.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick (2005c), p. 8.

ANNEXE 2

Modèle général de l'action sans interlocuteurs (Brousseau, 1998, p. 83)



Cinq définitions du jeu telles que proposées par Brousseau (1998, p. 82) :

Sens 1 : Les décisions et les actions au cours du jeu ne sont réglées que par le plaisir que le joueur éprouve à les accomplir, en éprouve à leurs effets, mais la décision de se livrer au jeu lui-même n'est finalisée par aucun but.

Sens 2 : Le jeu est l'organisation de cette activité sous un système de règles définissant un succès et un échec, un gain et une perte.

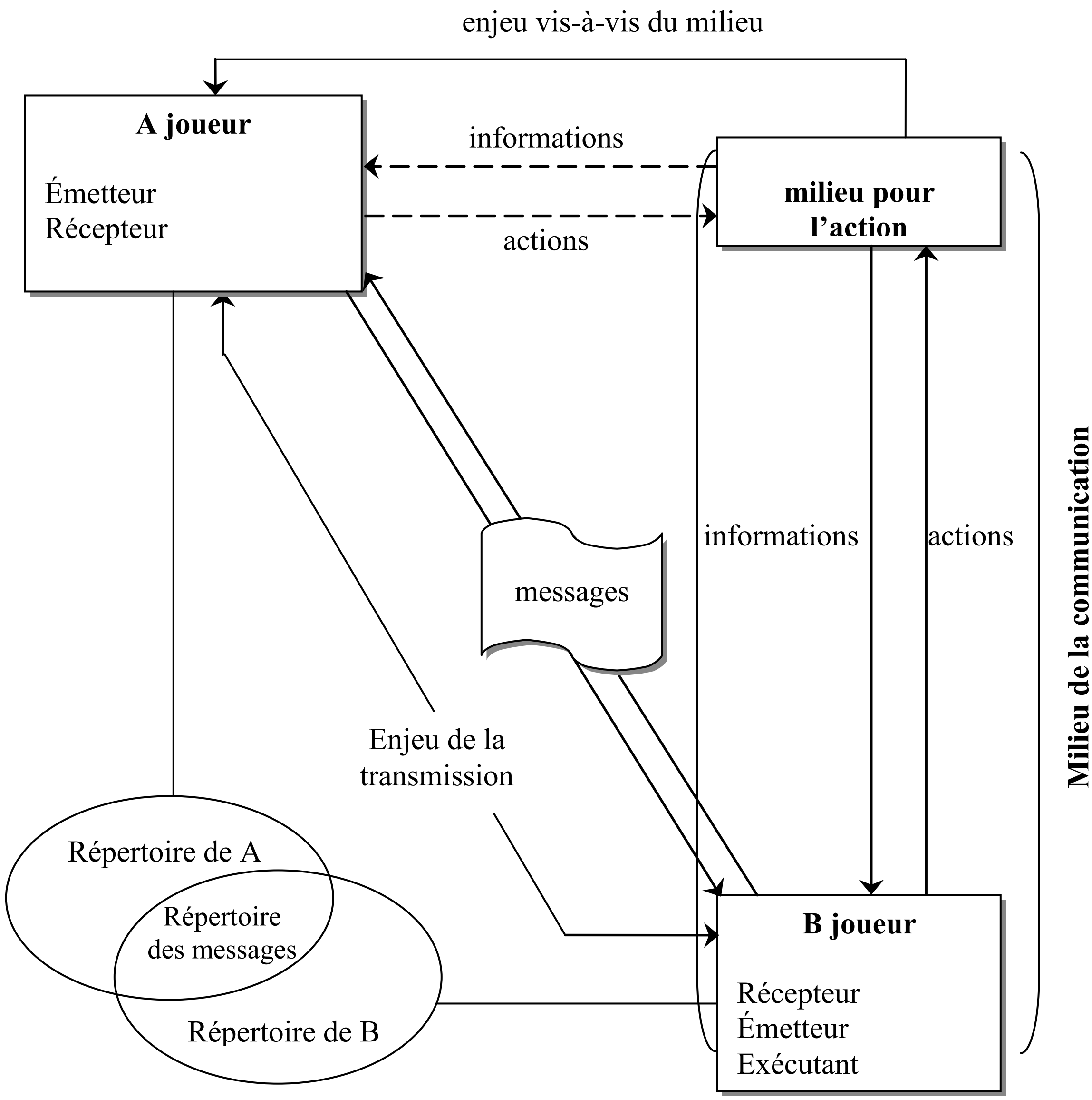
Sens 3 : Ce qui sert à jouer, les instruments du jeu, et éventuellement un des états du jeu déterminé par un assemblage particulier des instruments du jeu.

Sens 4 : La manière dont on joue, le « play ». Dans le cas où il s'agira de procédures, nous préférerons les termes de « tactique » ou de stratégie.

Sens 5 : L'ensemble des positions entre lesquelles le joueur peut choisir dans un état donné du jeu (au sens 2).

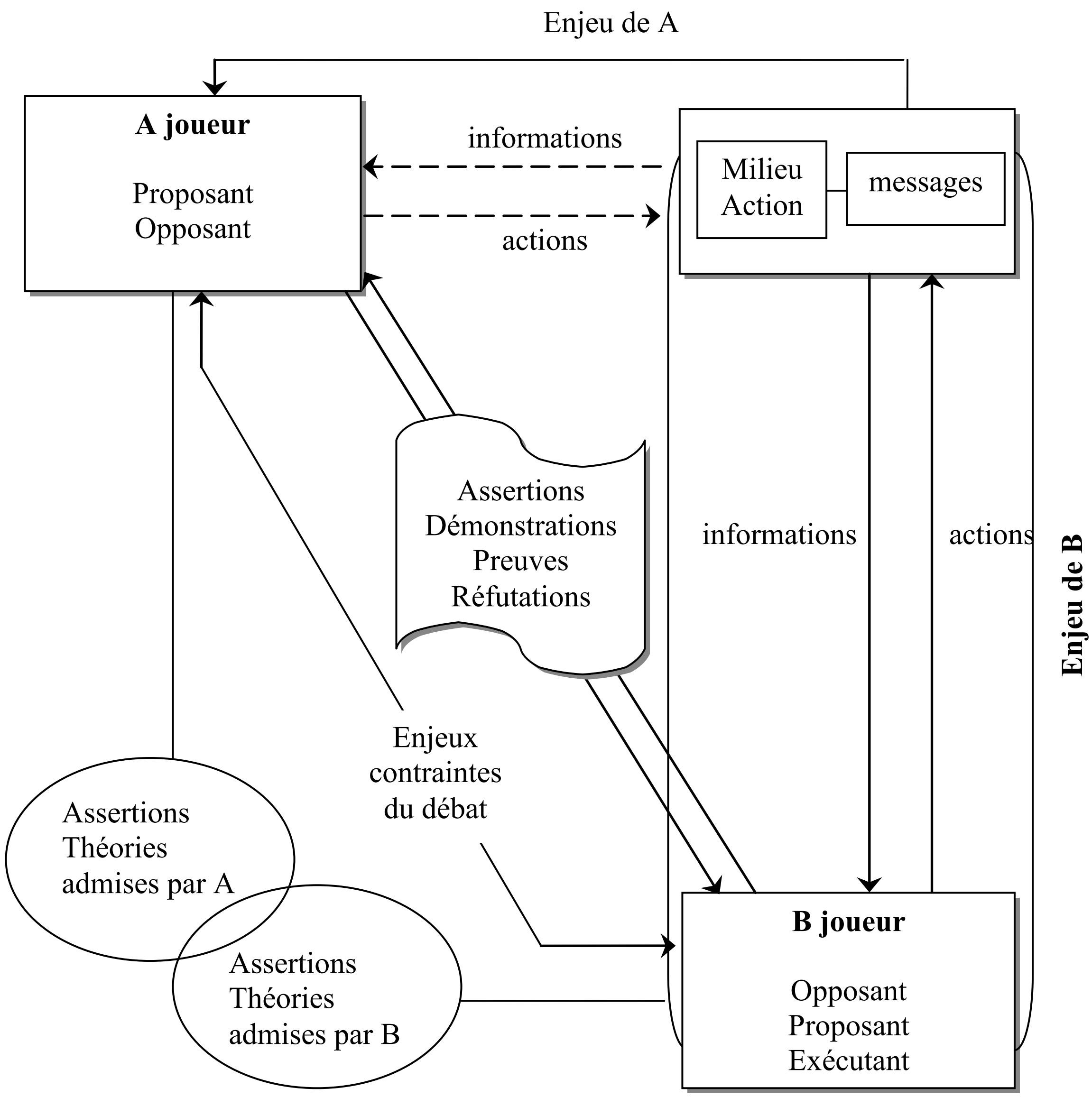
ANNEXE 3

Schéma de la communication (Brousseau, 1998, p. 106)



ANNEXE 4

Schéma de la validation explicite (Brousseau, 1998, p. 110)



ANNEXE 5

Vue d'ensemble du dispositif expérimental

Tableau VIII. Vue d'ensemble du dispositif expérimental

		Tâches	Savoirs en jeu	Phases
Prétest	Problème 1 : Le nombre de cure-dents	**Pré(Ind)-1a** : Identifier le nombre de cure-dents dans la 10e figure	Savoir mathématique (objet de savoir = suite linéaire) : recherche d'une régularité qui permet de trouver le nombre de cure-dents pour une figure donnée	Phase d'action : résolution du pb[130]
		Pré(Ind)-1b : Donner une façon qui permet de trouver le nombre de cure-dents dans n'importe quelle figure	Savoir mathématique (objet de savoir = suite linéaire) : recherche d'une régularité qui conduit à proposer une formule générale ou un programme de calcul	Phase d'action : résolution du pb
	Problème 2 : Qui a réussi à te convaincre?	**Pré(Ind)-2a** : Classer plusieurs preuves	Savoir protomathématique (objet de savoir = preuve) : évaluation de la justesse et de la pertinence des éléments de preuves	Phase d'action : résolution du pb
		Pré(Ind)-2b : Expliquer les raisons d'être de ce classement.	Savoir protomathématique (objet de savoir = critères de validation) : formulation de règles du débat mathématique	Phase d'action : résolution du pb
	Problème 3 : Deux nombres impairs consécutifs	**Pré(Ind)-3** : Identifier si la conjecture est vraie ou fausse	Savoir mathématique (objet de savoir = preuve) : Utilisation de propriétés mathématiques afin de prouver que la conjecture est vraie	Phase d'action : résolution du pb
Début de la situation didactique (échanges en classe pour les deux groupes et travail dans le forum pour le groupe expérimental)				

[130] Dans ce tableau, l'abréviation « pb » est utilisée pour représenter le mot « problème ».

Activité 1	Problème 1 : Le nombre de cure-dents	**Act1(Eq)-1a** : Déterminer quelles solutions, parmi celles soumises au prétest, doivent être retenues	Savoir mathématique (objet de savoir = suite linéaire) : analyse et évaluation de solutions mathématiques	Phase de formulation : échange sur les preuves Phase de validation : validation des preuves
		Act1(Eq)-1b : Déterminer quelles solutions, parmi celles soumises au prétest, doivent être rejetées	Savoir mathématique (objet de savoir = suite linéaire) : analyse et évaluation de solutions mathématiques	Phase de formulation : échange sur les preuves Phase de validation : validation des preuves
	Problème 2 : Qui a réussi à te convaincre?	**Act1(Ind)-2** : Classer plusieurs preuves	Savoir protomathématique (objet de savoir = preuve) : évaluation de la justesse et de la pertinence des arguments de preuves	Phase d'action : résolution du pb
		Act1(Eq)-2a : Classer plusieurs preuves	Savoir protomathématique (objet de savoir = preuve) : évaluation de la justesse et de la pertinence des arguments de preuves	Phase de formulation : échange sur le classement Phase de validation : validation des règles
		Act1(Eq)-2b : Échanger sur le classement des solutions	Savoir protomathématique (objet de savoir = critères de validation) : formulation de règles de débat mathématique	Phase de formulation : échange sur le classement Phase de validation : validation des règles
		Act1(Eq)-2c : Classer plusieurs preuves	Savoir protomathématique (objet de savoir = preuve) : évaluation de la justesse et de la pertinence des éléments de preuves	Phase de formulation : échange sur le classement Phase de validation : validation des règles
Institutionnalisation : Activité 1				

Activité 2	Problème 4 : Bonne question!	**Act2(Ind)-4a** : Identifier si la conjecture est vraie ou fausse	Savoir mathématique (objet de savoir = preuve) : Recherche d'un contre-exemple pour démontrer que la conjecture est fausse	Phase d'action : résolution du pb
		Act2(Eq)-4b : Échanger sur les solutions soumises afin de déterminer lesquelles doivent être retenues	Savoir mathématique (objet de savoir = preuve) : analyse et évaluation de solutions mathématiques (types de preuves)	Phase de formulation : échange sur les preuves Phase de validation : validation des preuves
		Act2(Eq)-4c : Échanger sur les solutions soumises afin de déterminer lesquelles doivent être rejetées	Savoir mathématique (objet de savoir = preuve) : analyse et évaluation de solutions mathématiques (types de preuves)	Phase de formulation : échange sur les preuves Phase de validation : validation des preuves
	Problème 5 : Vrai ou faux?	**Act2(Ind)-5a** : Identifier si la conjecture est vraie ou fausse	Savoir mathématique (objet de savoir = preuve) : Recherche d'un contre-exemple pour démontrer que la conjecture est fausse	Phase d'action : résolution du pb
		Act2(Eq)-5b : Échanger sur les solutions soumises afin de déterminer lesquelles doivent être retenues	Savoir mathématique (objet de savoir = preuve) : analyse et évaluation de solutions mathématiques (types de preuves)	Phase de formulation : échange sur les preuves Phase de validation : validation des preuves
		Act2(Eq)-5c : Échanger sur les solutions soumises afin de déterminer lesquelles doivent être rejetées	Savoir mathématique (objet de savoir = preuve) : analyse et évaluation de solutions mathématiques (types de preuves)	Phase de formulation : échange sur les preuves Phase de validation : validation des preuves
Institutionnalisation : Question Pré(Ind)-3 et Activité 2				

Activité 3 (Devoir)	Problème 6 : Pierre et Paul	**Act3(Ind)-6a** : Identifier, entre deux preuves, laquelle ou lesquelles sont vraies.	Savoir mathématique (objet de savoir = preuve) : analyse et évaluation de solutions mathématiques (types de preuves)	Phase d'action : résolution du pb
		Act3(Ind)-6b : Expliquer les raisons de ce choix	Savoir protomathématique (objet de savoir = critères de validation) : formulation de règles du débat mathématique	Phase d'action : résolution du pb
		Act3(Eq)-6a : Indiquer les arguments donnés pour dire que quelqu'un a raison ou tort	Savoir protomathématique (objet de savoir = critères de validation) : évaluation de la justesse et de la pertinence des éléments de preuves	Phase de formulation: échange sur les arguments
		Act3(Eq)-6b : Prendre position par rapport aux arguments donnés	Savoir protomathématique (objet de savoir = critères de validation) : évaluation de la justesse et de la pertinence des éléments de preuves	Phase de formulation : échange sur les arguments Phase de validation : validation des arguments
		Institutionnalisation : Activité 3		

Activité 4	Problème 7 : Les carreaux hachurés	**Act4(Ind)-7a** : Identifier le nombre de carreaux hachurés la 8^{e} figure	Savoir mathématique (objet de savoir = suite linéaire) : recherche d'une régularité qui permet de trouver le nombre de carreaux hachurés pour une figure donnée	Phase d'action : résolution du pb
		Act4(Ind)-7b : Donner une façon qui permet de trouver le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quelle figure	Savoir mathématique (objet de savoir = suite linéaire) : recherche d'une régularité qui conduit à proposer une formule générale ou un programme de calcul	Phase d'action : résolution du pb
		Act4(Eq)-7a : Échanger sur les solutions soumises afin de déterminer lesquelles doivent être retenues	Savoir mathématique (objet de savoir = suite linéaire) : analyse et évaluation de solutions mathématiques	Phase de formulation : échange sur les preuves Phase de validation : validation des preuves
		Act4(Eq)-7b : Échanger sur les solutions soumises afin de déterminer lesquelles doivent être rejetées	Savoir mathématique (objet de savoir = suite linéaire) : analyse et évaluation de solutions mathématiques	Phase de formulation : échange sur les preuves Phase de validation : validation des preuves
		Act4(Eq)-7c : Classer plusieurs preuves	Savoir protomathématique (objet de savoir = preuve) : évaluation de la justesse et de la pertinence des arguments de preuves	Phase d'action : résolution du pb
		Act4(Eq)-7d : Expliquer les raisons d'être de ce classement.	Savoir protomathématique (objet de savoir = critères de validation) : formulation de règles du débat mathématique	Phase d'action : résolution du pb
Institutionnalisation : Activité 4				

Fin de la situation didactique				
Post-test	Problème 8 : Des cercles et des carrés	**Post(Ind)-8a** : Identifier le nombre de carrés dans la 7e figure	Savoir mathématique (objet de savoir = suite linéaire) : recherche d'une régularité qui permet de trouver le nombre de carrés pour une figure donnée	Phase d'action : résolution du pb
		Post(Ind)-8b : Donner une façon qui permet de trouver le nombre de carrés dans n'importe quelle figure	Savoir mathématique (objet de savoir = suite linéaire) : recherche d'une régularité qui conduit à proposer une formule générale ou un programme de calcul	Phase d'action : résolution du pb
	Problème 9 : La plus convaincante de toutes	**Post(Ind)-9a** : Classer plusieurs preuves	Savoir protomathématique (objet de savoir = preuve) : évaluation de la justesse et de la pertinence des arguments de preuves	Phase d'action : résolution du pb
		Post(Ind)-9b : Expliquer les raisons d'être de ce classement.	Savoir protomathématique (objet de savoir = critères de validation) : formulation de règles du débat mathématique	Phase d'action : résolution du pb
	Problème 10 : Un nombre et son carré	**Post(Ind)-10** : Identifier si la conjecture est vraie ou fausse	Savoir mathématique (objet de savoir = preuve) : Utilisation de propriétés mathématiques afin de prouver que la conjecture est vraie	Phase d'action : résolution du pb
Institutionnalisation pour l'ensemble des activités				

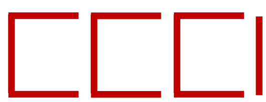
ANNEXE 6

Document contenant les solutions aux problèmes (remis aux enseignants des deux groupes)

Pré(Ind)-1a :
Lors de la résolution de cette question, les élèves peuvent s'y prendre de différentes façons. Ils peuvent dessiner la dixième figure, utiliser une table des valeurs afin de trouver la régularité permettant de passer d'une figure quelconque à la figure suivante (dans ce cas-ci, on additionne trois au nombre de cure-dents associé à la figure précédente) ou encore en trouvant une formule générale permettant de calculer directement le nombre de cure-dents dans la figure n^{o} 10. Peu importe la méthode utilisée par les élèves, la réponse obtenue est la même : il y a 31 cure-dents dans la dixième figure.

Pré(Ind)-1b :
<u>Solutions correctes</u>
Différentes expressions peuvent être suggérées afin de trouver le nombre total de cure-dents dans n'importe quelle figure. Pour chacune des solutions suggérées ci-dessous, il faut noter que n représente le numéro de la figure ou le nombre de carrés dans la figure.

i) $4 + 3(n - 1)$: Il y a quatre cure-dents dans le premier carré et trois cure-dents sont ajoutés pour former chacun des carrés suivants.

ii) $3n + 1$: 

iii) $2n + (n + 1)$: On calcule d'abord les côtés horizontaux pour l'ensemble des carrés ($2n$), pour ensuite ajouter les côtés verticaux ($n + 1$).

iv) $4n - [(n + 1) - 2]$: On calcule d'abord quatre cure-dents par carré ($4n$) et on enlève ensuite les côtés qui sont doublés (soit tous les côtés verticaux sauf celui à l'extrême gauche et celui à l'extrême droite).

<u>Solutions incorrectes</u>
L'expression $4n$ peut être proposée pour trouver le nombre de cure-dents nécessaires à la construction de n'importe quelle figure. Dans un tel cas, quelques conjectures peuvent être posées. Premièrement, il est possible que l'élève donne une solution spontanée en se limitant à considérer l'une des propriétés du carré, soit que celui-ci possède quatre côtés, et propose ainsi l'expression $4n$ pour trouver le nombre de cure-dents présents dans une figure quelconque. Dans un tel cas, la conception du carré ($4c$) prime et fait obstacle. Il est aussi probable que l'assemblage des cure-dents ait mal été perçu et que l'élève s'imagine qu'à certains endroits (quand un même côté fait partie de deux carrés), des cure-dents sont superposés.

Pré(Ind)-2a :
Les réponses finales sont les mêmes (tous les élèves fictifs confirment la conjecture) mais les preuves présentées sont différentes et chacune d'entre elles représente un type de preuve faisant partie de la typologie de Balacheff (1988). La première solution proposée par Arthur représente une preuve algébrique pouvant être associée à la démonstration. L'énoncé fait appel à la définition d'un nombre pair et les énoncés qui suivent en découlent. La solution 2 (celle d'Éric) est basée sur un cas limite à partir duquel Éric tente de prouver la véracité de la conjecture. Il cherche à illustrer que si son raisonnement est correct pour ce cas limite, il le sera dans tous les cas. La troisième solution (celle de Ceri) est présentée en mots. L'action est intériorisée et sa solution est fondée sur des théorèmes-en-acte. Dans la solution suggérée par Bonnie (solution 4), la conclusion est tirée à partir de quelques exemples concrets. Enfin, la solution 5 (celle d'Yvonne) est visuelle. Le dessin d'Yvonne peut s'appliquer à tous les nombres pairs (tout nombre pair pouvant être représenté par $2n$, il peut également être illustré par un ou plusieurs ensembles de « couples de points »).

Pré(Ind)-2b :
Le classement suggéré pour ce problème est présenté ci-dessous.

	1^er^ rang : La plus convaincante	2^e^ rang	3^e^ rang	4^e^ rang	5^e^ rang : La moins convaincante
# de la solution	1	3	5	2	4

Au premier rang se retrouve la solution 1, présentée par Arthur. C'est une démonstration mathématique typique. Conséquemment, elle représente la preuve la plus convaincante. Au deuxième rang suit la solution 3. Bien que cette preuve soit généralisable et fasse appel à des propriétés mathématiques, elle ne fait pas preuve d'autant de rigueur que la solution 1 dans sa présentation. C'est la principale distinction qui peut être faite entre ces solutions. Les preuves 2, 4 et 5 sont des preuves pragmatiques. La plus convaincante des trois est la solution 5 car elle est permet de généraliser le résultat à tous les nombres pairs. La solution de Bonnie (solution 4) est strictement empirique et l'énoncé n'est vérifié que pour quelques cas. Cette solution est nécessairement la moins convaincante. Enfin, dans la solution 2, la question de généralité est posée à travers l'étude de cas limites.

Pré(Ind)-3 :
La conjecture présentée est vraie. La résolution de ce problème vise principalement à amener les élèves à réaliser que plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver un énoncé et qu'ainsi, pour prouver qu'un énoncé est toujours vrai, ils doivent s'appuyer sur des propriétés[131]. Par exemple, la solution suivante pourrait être acceptée.

[131] En lien avec la règle des propriétés mathématiques.

Soit x un nombre entier
Un nombre pair peut être représenté par $2x$.
Deux nombres impairs consécutifs peuvent être représentés par $2x + 1$ et $2x + 3$, où $x \in \mathbb{N}$.

$(2x + 1) + (2x + 3) = 2x + 1 + 2x + 3 = 4x + 4 = 4(x + 1)$

$4(x + 1)$ est un multiple de 4 et est donc divisible par 4.

Act2(Ind)-4 :
Ce problème a pour objectif d'amener les élèves à réaliser qu'un contre-exemple suffit pour prouver qu'un énoncé mathématique est faux et que plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé est vrai[132]. En effet, dans ce cas-ci, la conjecture est vraie pour $n = 0$, 1, 2…, 10 mais pas pour $n = 11$ (on obtient alors 121, qui n'est pas un nombre premier). On ne peut donc pas dire qu'on obtient toujours un nombre premier.

Act2(Ind)-5 :
Dans ce problème, la conjecture présentée est vraie. Les élèves ne peuvent toutefois pas se limiter à faire quelques exemples pour le prouver. Ainsi, la résolution de ce problème vise principalement à amener les élèves à réaliser que pour prouver qu'un énoncé est toujours vrai, ils doivent s'appuyer sur des propriétés[133]. Par exemple, les deux solutions suivantes, qui présentent le même raisonnement, pourraient être acceptées.

Soit x un nombre entier
Les nombres entiers divisibles par 10 peuvent être représentés par l'expression $10n$, où $n \in \mathbb{N}$.
$10n = 5 \times 2 \times n$
$10n = 5 \times 2n$
$10n = 5 \times m \quad m = 2n$

Comme $10n = 5m$ = le nombre initial, alors le nombre initial divisible par 10 est aussi nécessairement divisible par 5.

[132] En lien, respectivement, avec la règle du débat mathématique du contre-exemple et avec la règle des exemples.
[133] En lien avec la règle des propriétés mathématiques.

Soit x un nombre entier.

Les nombres entiers divisibles par 10 peuvent être représentés par l'expression $10x$
$10x/5 = 2x$

Tous les nombres entiers divisibles par 10 sont divisibles par 5.

Certains élèves peuvent tout simplement conclure que l'affirmation est vraie parce que 10 est divisible par 5. Une telle conclusion est correcte, mais pas suffisamment complète. Un raisonnement plus complet est présenté ci-dessous.

Soit x un nombre entier divisible par 10.

x est divisible par 10 (par définition)
10 est divisible par 5 ($10/5 = 2$)
Donc x est divisible par 5

Tous les nombres entiers divisibles par 10 sont divisibles par 5.

Act3(Ind)-6 :
Ce problème vise deux objectifs :
- « Tester la conception mathématique du vrai et du faux en mathématiques » (Arsac et al., 1992, p. 132-133) grâce au choix de réponses permettant aux élèves d'identifier à la fois la solution de Pierre et celle de Paul comme étant correctes.
- Vérifier le statut qu'a le contre-exemple pour les élèves en opposant une série d'exemples à un contre-exemple.

La réponse correcte à ce problème est « Paul a raison et Pierre a tort ». Ainsi, le simple contre-exemple fourni par Paul suffit pour invalider l'affirmation. Pierre, de son côté, propose plusieurs calculs qui valident l'affirmation, mais sa solution demeure toutefois incorrecte, car elle ne concerne pas tous les cas possibles. Elle n'est pas assez générale. En effet, l'affirmation est fausse lorsqu'on multiplie un nombre entier positif par un nombre positif plus petit qu'un.

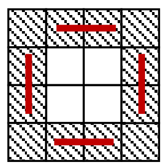
Act4(Ind)-7a :
Les élèves peuvent répondre à ce problème en dessinant la huitième figure, en utilisant une table des valeurs afin de trouver la régularité permettant de passer d'une figure quelconque à la figure suivante (dans ce cas-ci, on additionne quatre au nombre de carreaux hachurés présents dans la figure précédente) ou encore en trouvant une formule générale permettant

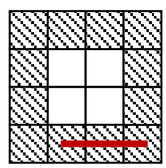
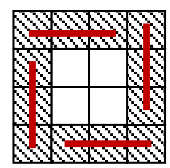
de calculer directement le nombre de carreaux hachurés dans la figure n° 8. Dans ce problème, le nombre de carreaux hachurés dans la huitième figure est de 36.

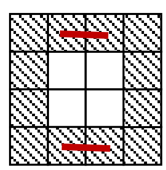
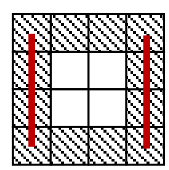
Act4(Ind)-7b :

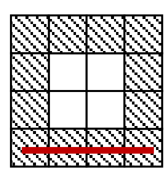
<u>Solutions correctes</u>

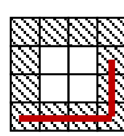
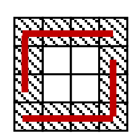
Les élèves peuvent s'y prendre de différentes façons pour résoudre ce problème. Premièrement, s'ils considèrent *n* comme étant le numéro de la figure, et donc la longueur du côté du carré intérieur, ils peuvent proposer au moins six expressions. Les cinq premières expressions ci-dessous sont en lien avec le calcul du périmètre tandis que la dernière expression est associée au calcul de l'aire des différentes parties (hachurées et non hachurée) de la figure.

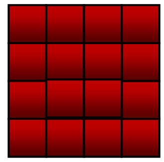
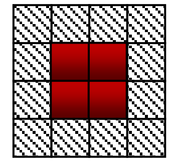
i) $4n + 4$: $4n =$  et on ajoute les quatre coins

ii) $4\,(n + 1)$: $n + 1 =$  et on multiplie par 4 

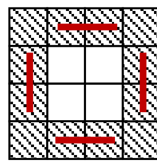
iii) $2n + 2(n + 2)$: $2n =$  $2(n + 2) =$ 

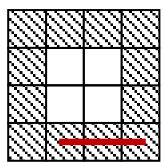
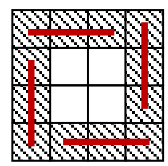
iv) $4(n + 2)$-4 : $(n + 2) =$  on multiplie par 4 et on enlève les quatre coins

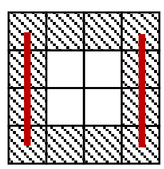
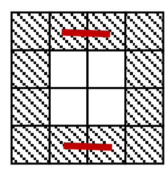
v) $[n + (n + 2)] \times 2$: $n + (n + 2) =$  et on multiplie par 2 

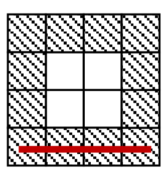
vi) $(n + 2)^2 - n^2$: $(n + 2)^2 =$  et on soustrait n^2 

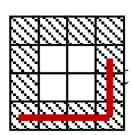
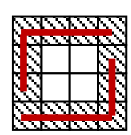
Deuxièmement, les élèves peuvent considérer m comme étant la longueur du côté du carré extérieur. Dans un tel cas, ils peuvent encore proposer au moins six expressions (qui sont toutes reprises des expressions ci-dessus, mais exprimée en fonction de la nouvelle valeur de la variable). Les cinq premières expressions ci-dessous sont en lien avec le calcul du périmètre tandis que la dernière expression est associée au calcul de l'aire des différentes parties (hachurées et non hachurée) de la figure.

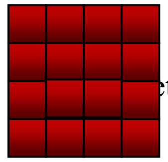
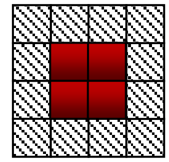
vii) $4(m - 2) + 4$: $4(m - 2) =$  et on ajoute les quatre coins

viii) $4(m - 1)$: $m - 1 =$  et on multiplie par 4 

ix) $2m + 2(m - 2)$: $2m =$  $2(m - 2) =$ 

x) $4m - 4$: $4m =$  et on enlève les quatre coins

xi) $[m + (m - 2)] \times 2$: $m + (m - 2) =$  et on multiplie par 2 

xii) $m^2 - (m-2)^2$: m^2 =  et on soustrait $(m-2)^2$ 

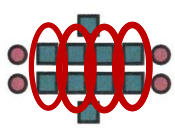
<u>Solution incorrecte</u>
Il est possible que ces derniers calculent le nombre de carreaux hachurés sur chaque côté du carré pour ensuite multiplier ce nombre par quatre (étant donné qu'un carré à quatre côtés). L'expression suggérée serait alors $4m$. Dans un tel cas, les carreaux se retrouvant dans les coins des carrés sont comptés deux fois. Il faut soustraire ces quatre carreaux pour obtenir une des expressions correctes, soit $4m - 4$.

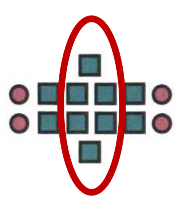
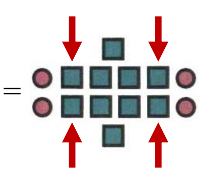
Post(Ind)-8a :
Les élèves peuvent répondre à ce problème en dessinant la septième figure, en utilisant une table des valeurs afin de trouver la régularité permettant de passer d'une figure quelconque à la figure suivante (dans ce cas-ci, on additionne quatre au nombre de carrés présents dans la figure précédente) ou encore en trouvant une formule générale permettant de calculer directement le nombre de carrés dans la figure n° 7. Dans ce problème, le nombre de carreaux hachurés dans la septième figure est de 30.

Post(Ind)-8a **:**
<u>Solutions correctes</u>
Les élèves peuvent s'y prendre de différentes façons pour résoudre ce problème. Ci-dessous, trois expressions différentes sont suggérées.

i) $4n + 2$: On calcule d'abord le nombre de carrés dans chacune des rangées ($4n$) pour ensuite ajouter les 2 carrés qui se trouvent en haut et en bas de la figure.

(Même expression, raisonnement différent)

$4n + 2$: $4n$ =  et on ajoute les 2 carrés qui se trouvent en haut et en bas de la figure.

ii) $(2n + 2) + 2n$: $(2n + 2)$ =  et $2n$ = 

iii) $2\ (2n) + 2$: Le nombre de cercles dans chaque figure est égal à $2n$ et il y a toujours deux fois plus de carrés au centre de la figure que de cercle. On a donc $2\ (2n)$ carrés au centre et on ajoute les 2 carrés qui se trouvent en haut et en bas de la figure.

Post(Ind)-9a :
Toutes les solutions présentent la même réponse (la conjecture est vraie), mais les types de preuves utilisés pour expliquer cette réponse diffèrent. La première solution (celle de Marie) est une preuve en mots et démontre un souci des propriétés en lien avec les nombres naturels consécutifs (par exemple, une différence d'un sépare ces nombres). La deuxième solution présentée, soit celle de Claude, est une preuve algébrique formelle. La troisième solution (celle de Cédric) étant une preuve visuelle, elle se distingue spécialement des autres par son apparence. Les dessins dans cette preuve sont applicables à un nombre de cas illimités. En effet, tous les trios de nombres naturels consécutifs peuvent être représentés par le dessin proposé. Par conséquent, le nombre de gauche sera toujours inférieur d'une unité au nombre du centre et le nombre de droite sera toujours supérieur d'une unité au nombre du centre. L'unité de plus se retrouvant à la droite de l'image peut être transférée dans l'espace libre (l'unité de moins) présent dans la partie gauche de l'image. En faisant ce transfert, on se retrouve avec un triplet formé d'un nombre. Ce triplet est donc automatiquement un multiple de trois. La quatrième solution proposée, soit celle de Julie, est une preuve arithmétique et repose sur le calcul de trois exemples. Enfin, tout comme la quatrième solution, la solution de Simon (solution 5) est une preuve arithmétique. Toutefois, elle ne comporte qu'un calcul. La fonction mathématique de ce calcul se distingue de ceux présentés dans la solution 4, car il vise à compléter la première preuve. Simon part de nombres jugés grands et vise à confirmer ou à infirmer, à partir de cet exemple, l'énoncé.

Post(Ind)-9b :
Le classement suggéré pour ce problème est présenté ci-dessous.

	1er rang : La plus convaincante	2e rang	3e rang	4e rang	5e rang : La moins convaincante
# de la solution	2	1	3	5	4

La preuve la plus convaincante est la démonstration mathématique développée par Claude (solution 2). Au deuxième rang se retrouve la solution 1. La solution 2 est jugée comme étant plus convaincante que la solution 1, car elle présente un niveau de formalisme plus élevé. La moins convaincante de toutes est la solution 4, où Julie ne s'appuie que sur quelques exemples pour tirer sa conclusion. Il reste à classer la solution 5 et la solution 3. Dans la solution 5, Simon propose un cas limite en supposant que si l'énoncé est aussi vrai pour ce cas, alors il le sera dans tous les cas. Étant donné que la question de la généralité est posée, cette preuve est jugée plus convaincante que la solution 4. Toutefois, l'exemple générique fourni par Cédric (solution 3) fait davantage appel à l'idée de généralisation que la solution 5. C'est pour cette raison que cette preuve se retrouve au troisième rang.

Post(Ind)-10 :
L'énoncé présenté est vrai. La solution présentée ci-dessous est une des solutions valides à ce problème.

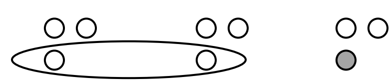
Tout nombre pair peut être représenté par $2a$
Tout nombre impair peut être représenté par $2a + 1$

Ce nombre au carré = $(2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1$

$4a^2$ peut aussi être écrit $2n$ (où $n = 2a^2$). $4a^2$ est donc un nombre pair.
$4a$ peut aussi être écrit $2m$ (où $m = 2a$). $4a$ est un nombre pair.
Étant donné qu'on additionne 1 à deux nombres pairs, on obtient un nombre impair.

Si a est un nombre naturel impair, a^2 est également un nombre impair.

D'autres élèves peuvent choisir de présenter leur solution sous la forme d'un dessin (voir la figure ci-dessous). Vu que tout nombre impair peut être écrit sous la forme $2x + 1$, tout nombre impair est représenté par une ou plusieurs paires de points et un point supplémentaire. Quand une telle figure est répétée un nombre impair de fois, si les points supplémentaires sont regroupés en paquets de deux, il reste toujours un point, ce qui veut dire que la solution est toujours impaire.



Étant donné qu'on obtient un nombre pair de « paquets de deux points » et qu'il y a toujours un point seul, on peut conclure que si a est un nombre naturel impair, a^2 est également un nombre impair.

ANNEXE 7

Ensemble des problèmes de l'expérimentation[134]

<u>Problème 1 : Le nombre de cure-dents</u> (adapté de Elchuck *et al*., 1997)

À l'aide de cure-dents, on a formé cette suite de carrés.

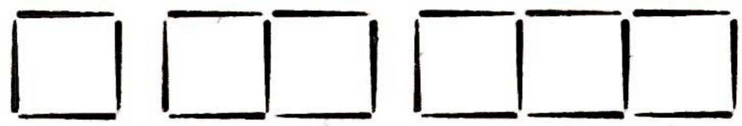


Figure n° 1 Figure n° 2 Figure n° 3

Pré(Ind)-1a : Si on poursuit selon le même principe, combien de cure-dents y aura-t-il dans la figure n° 10?

Pré(Ind)-1b : Donne une façon qui te permet de trouver le nombre de cure-dents pour n'importe qu'elle figure.

Act1(Eq)-1a : Parmi les solutions proposées par vos collègues du NB et du Qc, lesquelles avez-vous retenues? Expliquez votre réponse.

Act1(Eq)-1a : Parmi les solutions proposées par vos collègues du NB et du Qc, lesquelles avez-vous rejetées? Expliquez votre réponse.

<u>Problème 2 : Qui a réussi à te convaincre?</u> (adapté de Healy et Hoyles, 2000, p. 400)

Plusieurs élèves essaient de prouver si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

« ***Quand on additionne deux nombres pairs (peu importe lesquels), la réponse est toujours paire.*** »

Pré(Ind)-2a : Les solutions données par les élèves sont présentées ci-dessous. Classe ces solutions **de la plus convaincante à la moins convaincante**.

	1er rang : La plus convaincante	2e rang	3e rang	4e rang	5e rang : La moins convaincante
# de la solution					

[134] Les questions sont regroupées par problèmes et non par activité (prétest, activité 1, etc.). Ainsi, dans un premier temps, toutes les questions en lien avec le problème 1 sont présentées. Les questions associées au problème 2 suivent, et ainsi de suite. Il importe également de noter que dans les documents remis aux élèves lors du prétest, du post-test et des activités, un espace était réservé pour écrire la réponse.

Solution 1

Arthur répond :
Un nombre pair est multiple de 2 et peut être écrit sous la forme 2n
2a est un nombre pair quelconque
2b est un nombre pair quelconque
2a + 2b = 2(a + b) → par mise en évidence
2(a + b) est un nombre pair

Arthur affirme donc que c'est vrai.

Solution 2

Éric répond :
2 est le plus petit nombre pair positif non nul connu
-24680 est un nombre pair négatif formé de tous les chiffres pairs (0, 2, 4, 6 et 8)
-24680 + 2 = -24678
-24678 est un nombre pair
Si ça fonctionne pour ces deux nombres, ça fonctionne pour tous les nombres pairs.

Éric affirme donc que c'est vrai.

Solution 3

Ceri répond :
Les nombres pairs sont des nombres entiers qui peuvent être divisés par 2 (et il n'y a pas de reste). Quand on additionne des nombres avec un facteur commun, 2 dans ce cas-ci, la réponse va avoir le même facteur commun.

Ceri affirme donc que c'est vrai.

Solution 4

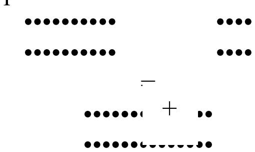
Bonnie répond :

2 + 2 = 4	4 + 2 = 6
2 + 4 = 6	4 + 4 = 8
2 + 6 = 8	4 + 6 = 10

Bonnie affirme donc que c'est vrai.

Solution 5

Yvonne répond :



Yvonne affirme donc que c'est vrai.

Pré(Ind)-2b : Pourquoi as-tu classé les solutions de cette façon? Pour chaque solution, explique ce qui est bon et ce qui est moins bon.

Act1(Ind)-2 : Que penses-tu du classement que tu as suggéré au départ (sur le prétest)? Est-il correct? Dois-tu y apporter des changements? Explique ta réponse.

Act1(Eq)-2a : Les solutions données par les élèves sont présentées ci-dessous. Classe ces solutions **de la plus convaincante à la moins convaincante**.

Act1(Eq)-2b : Par rapport au classement suggéré par chacun au départ, quels principaux changements ont été apportés? Pourquoi? Expliquez votre réponse.

Act1(Eq)-2c : Quel est le classement final que vous suggérez?

	1er rang : La plus convaincante	2^e rang	3^e rang	4^e rang	5^e rang : La moins convaincante
# de la solution					

Problème 3 : Deux nombres impairs consécutifs (Arsac et al., 1992, p. 122)

Lis attentivement l'énoncé ci-dessous :

La somme de 2 nombres impairs consécutifs est toujours multiple de 4.

Pré(Ind)-3 : Cet énoncé est-il vrai ou faux? Justifie ta réponse.

Problème 4 : Bonne question! (adapté de Arsac *et al.*, 1992, p. 25)

Dans l'expression n × n – n + 11, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre premier?

Act2(Ind)-4 : Quelle réponse proposes-tu à cette question? Explique pourquoi.

Act2(Eq)-4a : Parmi les explications proposées par les membres de votre équipe, lesquelles retenez-vous? Justifiez vos choix.

Act2(Eq)-4b : Parmi les explications proposées par les membres de votre équipe, lesquelles rejetez-vous? Justifiez vos choix.

Problème 5 : Vrai ou faux? (adapté de Arsac *et al.*, 1992, p. 122)

Tous les nombres entiers divisibles par 10 sont divisibles par 5. Cette affirmation est-elle vraie ou fausse?

Act2(Ind)-5 : Quelle réponse proposes-tu à cette question? Explique pourquoi.

Act2(Eq)-5a : Parmi les explications proposées par les membres de votre équipe, lesquelles retenez-vous? Justifiez vos choix.

Act2(Eq)-5b : Parmi les explications proposées par les membres de votre équipe, lesquelles rejetez-vous? Justifiez vos choix.

<u>Problème 6 : Pierre et Paul</u> (Arsac *et al.*, 1992, p. 132-133)

On demande à Pierre et à Paul de dire si cette phrase est vraie :

« *Quels que soient les deux nombres strictement positifs que je choisis, leur produit est toujours supérieur ou égal à chacun des deux nombres.* »

Pierre répond : « Cette phrase est vraie, car :

Si je prends 3 et 2, le produit est 6 et 6 > 3 et 6 > 2.
Si je prends 1,3 et 5, le produit est 6,5 et 6,5 > 1,3 et 6,5 > 5.
Si je prends 4,8 et 150, le produit est 720, il est plus grand que 4,8 et 150.
Si je prends 11,2 et 4, le produit est 44,8, il est plus grand que 11,2 et 4.

Tu vois, le produit est toujours plus grand que les nombres que j'ai choisis au départ, donc la phrase est vraie. »

Paul répond : « Cette phrase est fausse, car :
Si je prends 4 et 0,3, le produit est égal à 1,2 et 1,2 < 4. »

Qui a raison? Qui a tort?

Act3(Ind)-6a : Parmi les réponses suivantes, coche celle qui t'apparaît la plus appropriée :

Pierre a raison et Paul a tort : ☐
Paul a raison et Pierre a tort : ☐
Ni Paul ni Pierre n'ont raison : ☐
Pierre et Paul ont raison tous les deux : ☐

Act3(Eq)-6b : Quels arguments proposes-tu pour appuyer ton choix de réponse? Autrement dit, qu'est-ce qui te permet de dire que quelqu'un a raison ou que quelqu'un a tort?

Act3(Eq)-6a : À partir des arguments donnés par chacun des membres de votre équipe lors du travail individuel, complétez le tableau à la page suivante en indiquant les arguments donnés par chaque élève pour dire que quelqu'un a raison ou que quelqu'un a tort.
Note : Il y aura nécessairement des cellules vides dans votre tableau.

	Vos arguments pour dire que **Pierre a raison**	Vos arguments pour dire que **Paul a raison**	Vos arguments pour dire que **Pierre a tort**	Vos arguments pour dire que **Paul a tort**
Élève 1				
Élève 2				
Élève 3				
Élève 4				

Act3(Eq)-6b : Il y aura sans doute des arguments avec lesquels vous ne serez pas tous d'accord. Pour nous indiquer dans quelle mesure vous êtes d'accord ou non avec chacun des arguments, inscrivez à l'intérieur de chaque cellule (dans le rectangle gris) le nombre d'élèves de votre équipe qui sont d'accord avec l'argument de cette cellule.
(Si une cellule est vide, n'inscrivez rien dans le rectangle gris.)

<u>Problème 7 : Les carreaux hachurés</u> (adapté de Arsac *et al.*, 1992, p. 126)

Un carré est partagé en n × n carreaux. On hachure les carreaux qui forment le contour de chaque figure.

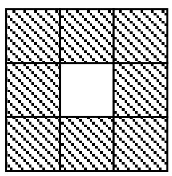


Figure n° 1

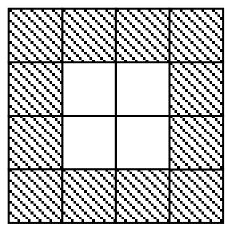


Figure n° 2

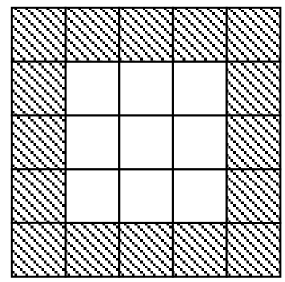


Figure n° 3

Act4(Ind)-7a : Combien de carreaux hachurés y aura-t-il dans la figure n° 8?

Act4(Ind)-7b : Donne une façon qui te permettrait de trouver le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quelle figure si elles sont toutes construites selon le même modèle.

Act4(Eq)-7a : Parmi les façons proposées par les membres de votre équipe, lesquelles retenez-vous? Expliquez votre réponse.

Act4(Eq)-7b : Parmi les façons proposées par les membres de votre équipe, lesquelles rejetez-vous? Expliquez votre réponse.

Act4(Eq)-7c : Observez attentivement les solutions proposées par vos collègues du Nouveau-Brunswick et du Québec. Classez ces solutions **de la plus convaincante à la moins convaincante**.

	1er rang : La plus convaincante	2e rang	3e rang	4e rang	5e rang : La moins convaincante
# de la solution					

Act4(Eq)-7d : Pourquoi avez-vous décidé de classer les solutions de cette façon? Pour chaque solution, expliquez ce qui est bien et ce qui est moins bien.

<u>Problème 8 : Des cercles et des carrés</u> (Adapté de Elchuck et al., 1997b, p. 229)

Observe attentivement les assemblages suivants.

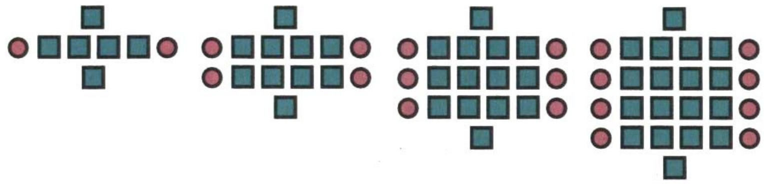


Figure nº 1 Figure nº 2 Figure nº 3 Figure nº 4

Post(Ind)-8a : Combien de carrés y aura-t-il dans la figure n° 7 si on poursuit les assemblages selon la régularité utilisée ci-dessus?

Post(Ind)-8b : Donne une façon qui te permettrait de trouver le nombre de carrés pour n'importe quelle figure.

<u>Problème 9 : La plus convaincante de toutes</u>

Plusieurs élèves essaient de prouver si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

« ***La somme de 3 nombres naturels consécutifs est toujours multiple de 3.*** »

Post(Ind)-9a : Les solutions données par les élèves sont présentées ci-dessous. Classe ces solutions **de la plus convaincante à la moins convaincante**.

	1er rang : La plus convaincante	2e rang	3e rang	4e rang	5e rang : La moins convaincante
# de la solution					

Solution 1

Marie répond :
Si j'ordonne les trois nombres du plus petit au plus grand, je peux voir que :

- Le premier nombre est une unité de moins que le deuxième nombre.
- Le troisième nombre est une unité de plus que le deuxième nombre.

Si je prends l'unité de plus du troisième nombre et que je l'ajoute au premier nombre, j'obtiens trois fois le deuxième nombre. Étant donné que j'additionne le même nombre trois fois, la somme va être un multiple de 3.

Marie affirme donc que c'est vrai.

Solution 2

Claude répond :
1^{er} nombre = n
2^{e} nombre = n + 1
3^{e} nombre = (n + 1) + 1 = n + 2

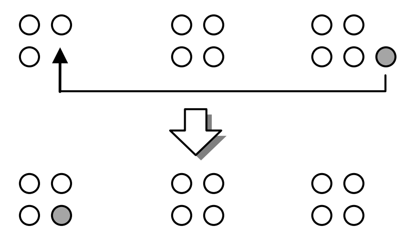
$$\begin{aligned} & n + (n + 1) + (n + 2) \\ &= n + n + 1 + n + 2 \\ &= 3n + 3 \\ &= 3\,(n + 1) \end{aligned}$$

3 (n + 1) est un multiple de 3

Claude affirme donc que c'est vrai.

Solution 3

Cédric répond :



Cédric affirme donc que c'est vrai.

Solution 4

Julie répond :
1 + 2 + 3 = 6 (6 est un multiple de 3)
15 + 16 + 17 = 48 (48 est un multiple de 3)
29 + 30 + 31 = 90 (90 est un multiple de 3)

Julie affirme donc que c'est vrai.

Solution 5

Simon répond :
Cela semble fonctionner pour des petits nombres mais il faut aussi vérifier pour des grands nombres.

5724 + 5725 + 5726 = 17 175
(17 175 est un multiple de 3)

Simon affirme donc que c'est vrai.

Post(Ind)-9b : Pourquoi as-tu classé les solutions de cette façon? Pour chaque solution, explique ce qui est bon et ce qui est moins bon.

<u>Problème 10 : Un nombre et son carré</u>

Lis attentivement l'énoncé ci-dessous :

Si a est un nombre naturel impair, alors a^2 est également un nombre impair.

Post(Ind)-10 : Cet énoncé est-il vrai ou faux? Justifie ta réponse.

ANNEXE 8

Vue d'ensemble du dispositif expérimental pour les enseignants du groupe contrôle

		Tâches	**Lieu de l'activité (salle de classe, ou devoir à la maison)**	**Type de travail**	**Temps réservé à cette activité**
Pré-test	Problème 1 : Le nombre de cure-dents	Pré(Ind)-1a : Identifier le nombre de cure-dents dans la dixième figure. Pré(Ind)-1b : Donner une façon qui permet de trouver le nombre de cure-dents formant n'importe quelle figure.	Salle de classe	Travail individuel	- Environ 15 minutes pour l'installation - 30 à 45 minutes pour répondre aux questions
	Problème 2 : Qui a réussi à te convaincre?	Pré(Ind)-2a : Classer plusieurs solutions (types de preuves) données au problème « Quelle solution est la plus convaincante? » Pré(Ind)-2b : Expliquer son classement en a)			
	Problème 3 : Deux nombres impairs consécutifs	Pré(Ind)-3 : Identifier si la conjecture de la question est vraie ou fausse.			

<table>
<tr><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Activité 1</td><td>Problème 1 : Le nombre de cure-dents</td><td>Act1(Eq)-1a : Identifier les solutions à retenir pour la question Pré(Ind)-1b

Act1(Eq)-1b : Identifier les solutions à rejeter pour la question Pré(Ind)-1b</td><td rowspan="2">- Salle de classe</td><td>- Travail d'équipe : Act1(Eq)-1a et Act1(Eq)-1b</td><td rowspan="2">- 45 minutes</td></tr>
<tr><td>Problème 2 : Qui a réussi à te convaincre?</td><td>Act1(Eq)-2a : Revoir le classement donné à la question Pré(Ind)-2a

Act1(Eq)-2b : Identifier les changements apportés au classement de la question Pré(Ind)-2a

Act1(Eq)-2c : Donner un classement final.</td><td>- Travail individuel : Act1(Eq)-2a

- Travail d'équipe : Act1(Eq)-2b et Act1(Eq)-2c</td></tr>
<tr><td colspan="6">Retour en grand groupe et institutionnalisation : Activité 1</td></tr>
<tr><td>Activité 2</td><td>Problème 4 : Bonne question!</td><td>Act2(Ind)-4 : Identifier si la conjecture de la question est vraie ou fausse.

Act2(Eq)-4a : Identifier les solutions à retenir pour la question Act2(Ind)-4

Act2(Eq)-4b : Identifier les solutions à rejeter pour la question Act2(Ind)-4</td><td>- Salle de classe</td><td>- Travail individuel : Act2(Ind)-4

- Travail d'équipe : Act2(Eq)-4a et Act2(Eq)-4b</td><td>- 60 minutes</td></tr>
</table>

	Problème 5 : Vrai ou faux?	Act2(Ind)-5 : Identifier si la conjecture est vraie ou fausse. Act2(Eq)-5a : Identifier les solutions à retenir pour la question Act2(Ind)-5 Act2(Eq)-5b : Identifier les solutions à rejeter pour la question Act2(Ind)-5		- Travail individuel : Act2(Ind)-5 - Travail d'équipe : Act2(Eq)-5a et Act2(Eq)-5b	
Retour en grand groupe et institutionnalisation : Problème 2.1 (prétest) et Activité 2					
Activité 3 (Devoir)	Problème 6 : Pierre et Paul	Act3(Ind)-6a : Identifier, entre deux preuves, laquelle ou lesquelles sont vraies. Act3(Ind)-6b : Expliquer la réponse donnée à la question Act3(Ind)-6a Act3(Eq)-6a : Échanger sur les critères de validation retenus par tous à la question Act3(Ind)-6b Act3(Eq)-6b : Échanger sur les critères de validation « problématiques » de la question Act3(Ind)-6b	- Devoir à compléter à la maison : Act3(Ind)-6a et Act3(Ind)-6b - Salle de classe : Act3(Eq)-6a et Act3(Eq)-6b	- Travail individuel : Act3(Ind)-6a et Act3(Ind)-6b - Travail d'équipe : Act3(Eq)-6a et Act3(Eq)-6b	- 45 minutes : Act3(Eq)-6a et Act3(Eq)-6b
Retour en grand groupe et institutionnalisation : Activité 3					

Activité 4	Problème 7 : Les carreaux hachurés	Act4(Ind)-7a : Identifier le nombre de carreaux hachurés dans la dixième figure. Act4(Ind)-7b : Donner une façon qui permet de trouver le nombre de carreaux hachurés dans n'importe quelle figure. Act4(Eq)-7a : Identifier les solutions à retenir pour la question Act4(Ind)-7b Act4(Eq)-7b : Identifier les solutions à rejeter pour la question Act4(Ind)-7b	- Salle de classe	- Travail individuel : Act4(Ind)-7a et Act4(Ind)-7b - Travail d'équipe : Act4(Eq)-7a et Act4(Eq)-7b	- 20 minutes : Act4(Ind)-7a et Act4(Ind)-7b - 35 minutes : Act4(Eq)-7a et Act4(Eq)-7b
		Intervention de la chercheuse afin de s'assurer que seules les solutions correctes ont été retenues par les élèves (quelques solutions vous seront envoyées).			
		Act4(Eq)-7c : Classer les solutions de leurs collègues de la plus convaincante à la moins convaincante. Act4(Eq)-7d : Expliquer le classement à la question Act4(Eq)-7c	- Salle de classe	- Travail d'équipe : Act4(Eq)-7c et Act4(Eq)-7d	- 35 minutes : Act4(Eq)-7c et Act4(Eq)-7d
Retour en grand groupe et institutionnalisation : Activité 4					

Post-test	Problème 8 : Des cercles et des carrés	Post(Ind)-8a : Identifier le nombre de carrés dans la septième figure. Post(Ind)-8b : Donner une façon qui permet de trouver le nombre de cure-dents formant n'importe quelle figure.	Salle de classe	Travail individuel	- Environ 15 minutes pour l'installation - 30 à 45 minutes pour répondre aux questions
	Problème 9 : La plus convaincante de toutes	Post(Ind)-9a : Classer plusieurs solutions (types de preuves) données au problème « Quelle solution est la plus convaincante? » Post(Ind)-9b : Expliquer son classement en a)			
	Problème 10 : Un nombre et son carré	Post(Ind)-10 : Identifier si la conjecture de la question est vraie ou fausse.			
Retour en grand groupe et institutionnalisation pour l'ensemble des activités					

Notes :

- Temps total pour l'ensemble des activités → environ 5h30
- Vous êtes libre de former les équipes (3 – 4 élèves) comme bon vous semble. Elles peuvent changer d'une activité à l'autre.

Rôle de l'enseignant :

Lors de l'expérimentation, votre rôle est crucial, car vous servez de tremplin aux activités mathématiques proposées. Entre autres, il est primordial que vous relanciez sans cesse les élèves en les encourageant à aller plus loin dans leur réflexion. S'ils ne remettent pas en question le travail de leurs collègues, c'est à vous de le faire, mais surtout de les aider à le faire. Dès que l'activité est en branle et que les élèves savent ce qu'ils ont à faire, vous devenez donc, en quelque sorte, un acteur périphérique dont la tâche principale consiste à s'assurer que l'activité se déroule bien. Il vous revient également de maintenir des conditions qui permettent aux élèves de demeurer en activité (par exemple, questionner les élèves afin de les amener à approfondir leurs réflexions).

ANNEXE 9

Vue d'ensemble du dispositif expérimental pour les enseignants du groupe expérimental

		Tâches	Lieu de l'activité (salle de classe, forum ou devoir à la maison)	Type de travail	Temps réservé à cette activité
Pré-test	Problème 1 : Le nombre de cure-dents	Pré(Ind)-1a : Identifier le nombre de cure-dents dans la dixième figure. Pré(Ind)-1b : Donner une façon qui permet de trouver le nombre de cure-dents formant n'importe quelle figure.	Salle de classe	Travail individuel	- Environ 15 minutes pour l'installation - 30 à 45 minutes pour répondre aux questions
	Problème 2 : Qui a réussi à te convaincre?	Pré(Ind)-2a : Classer plusieurs solutions (types de preuves) données au problème « Quelle solution est la plus convaincante? » Pré(Ind)-2b : Expliquer son classement en a)			
	Problème 3 : Deux nombres impairs consécutifs	Pré(Ind)-3 : Identifier si la conjecture de la question est vraie ou fausse.			

<table>
<tr><th colspan="6">Début du travail dans le forum électronique</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Activité 1</td><td>Problème 1 :
Le nombre de cure-dents</td><td>Act1(Eq)-1a : Identifier les solutions à retenir pour la question Pré(Ind)-1b

Act1(Eq)-1b : Identifier les solutions à rejeter pour la question Pré(Ind)-1b</td><td rowspan="2">- Salle de classe</td><td>- Travail d'équipe : Act1(Eq)-1a et Act1(Eq)-1b</td><td rowspan="2">- 15 minutes</td></tr>
<tr><td>Problème 2 :
Qui a réussi à te convaincre?</td><td>Act1(Eq)-2a : Revoir le classement donné à la question Pré(Ind)-2a

Act1(Eq)-2b : Identifier les changements apportés au classement de la question Pré(Ind)-2a

Act1(Eq)-2c : Donner un classement final.</td><td>- Travail individuel : Act1(Eq)-2a

- Travail d'équipe : Act1(Eq)-2b et Act1(Eq)-2c</td></tr>
<tr><td>Problème 1 :
Le nombre de cure-dents</td><td>- Écrire les solutions retenues à la question Pré(Ind)-1b
- Valider et invalider les solutions de leurs collègues.</td><td rowspan="2">- Forum électronique</td><td rowspan="2">- Travail d'équipe</td><td rowspan="2">- 30 minutes</td></tr>
<tr><td>Problème 2 :
Qui a réussi à te convaincre?</td><td>- Écrire le classement retenu à la question Act1(Eq)-2c
- Valider et invalider les classements de leurs collègues.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Retour en grand groupe et institutionnalisation : Activité 1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">Activité 2</td><td>Problème 4 : Bonne question!</td><td>Act2(Ind)-4 : Identifier si la conjecture de la question est vraie ou fausse.

Act2(Eq)-4a : Identifier les solutions à retenir pour la question Act2(Ind)-4

Act2(Eq)-4b : Identifier les solutions à rejeter pour la question Act2(Ind)-4</td><td rowspan="2">- Salle de classe</td><td>- Travail individuel : Act2(Ind)-4

- Travail d’équipe : Act2(Eq)-4a et Act2(Eq)-4b</td><td rowspan="2">- 30 minutes</td></tr>
<tr><td>Problème 5 : Vrai ou faux?</td><td>Act2(Ind)-5 : Identifier si la conjecture est vraie ou fausse.

Act2(Eq)-5a : Identifier les solutions à retenir pour la question Act2(Ind)-5

Act2(Eq)-5b : Identifier les solutions à rejeter pour la question Act2(Ind)-5</td><td>- Travail individuel : Act2(Ind)-5

- Travail d’équipe : Act2(Eq)-5a et Act2(Eq)-5b</td></tr>
<tr><td>Problème 4 : Bonne question!</td><td>- Écrire les solutions retenues à la question Act2(Ind)-4
- Valider et invalider les solutions de leurs collègues.</td><td rowspan="2">- Forum électronique</td><td rowspan="2">- Travail d’équipe</td><td rowspan="2">- 30 minutes</td></tr>
<tr><td>Problème 5 : Vrai ou faux?</td><td>- Écrire les solutions retenues à la question Act2(Ind)-4
- Valider et invalider les solutions de leurs collègues.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Retour en grand groupe et institutionnalisation : Activité 2</td></tr>
</table>

Activité 3 (Devoir)	Problème 6 : Pierre et Paul	Act3(Ind)-6a : Identifier, entre deux preuves, laquelle ou lesquelles sont vraies. Act3(Ind)-6b : Expliquer la réponse donnée à la question Act3(Ind)-6a Act3(Eq)-6a : Échanger sur les critères de validation retenus par tous à la question Act3(Ind)-6b Act3(Eq)-6b : Échanger sur les critères de validation « problématiques » de la question Act3(Ind)-6b	- Devoir à compléter à la maison : Act3(Ind)-6a et Act3(Ind)-6b - Salle de classe : Act3(Eq)-6a et Act3(Eq)-6b	- Travail individuel : Act3(Ind)-6a et Act3(Ind)-6b - Travail d'équipe : Act3(Eq)-6a et Act3(Eq)-6b	- 15 minutes : Act3(Eq)-6a et Act3(Eq)-6b
		- Écrire la solution choisie à la question Act3(Ind)-6a - Expliquer la réponse de l'équipe - Valider et invalider les solutions de leurs collègues.	- Forum électronique	- Travail d'équipe	- 30 minutes
Retour en grand groupe et institutionnalisation : Activité 3					

Activité 4	Problème 7 : Les carreaux hachurés	Act4(Ind)-7a : Identifier le nombre de carreaux hachurés dans la dixième figure. Act4(Ind)-7b : Donner une façon qui permet de trouver le nombre de carreaux hachurés dans n'importe quelle figure. Act4(Eq)-7a : Identifier les solutions à retenir pour la question Act4(Ind)-7b Act4(Eq)-7b : Identifier les solutions à rejeter pour la question Act4(Ind)-7b	- Salle de classe	- Travail individuel : Act4(Ind)-7a et Act4(Ind)-7b - Travail d'équipe : Act4(Eq)-7a et Act4(Eq)-7b	- 20 minutes : Act4(Ind)-7a et Act4(Ind)-7b - 20 minutes : Act4(Eq)-7a et Act4(Eq)-7b
		Intervention de la chercheuse afin de s'assurer que seules les solutions correctes ont été retenues par les élèves (quelques solutions vous seront envoyées).			
		Act4(Eq)-7c : Classer les solutions de leurs collègues de la plus convaincante à la moins convaincante. Act4(Eq)-7d : Expliquer le classement à la question Act4(Eq)-7c	- Salle de classe	- Travail d'équipe : Act4(Eq)-7c et Act4(Eq)-7d	- 20 minutes : Act4(Eq)-7c et Act4(Eq)-7d
		- Écrire le classement retenu à la question Act4(Ind)-7b - Valider et invalider les classements de leurs collègues.	- Forum électronique	- Travail d'équipe	- 30 minutes
Retour en grand groupe et institutionnalisation : Activité 4					
Fin du travail dans le forum électronique					

Post-test	Problème 8 : Des cercles et des carrés	Post(Ind)-8a : Identifier le nombre de carrés dans la septième figure. Post(Ind)-8b : Donner une façon qui permet de trouver le nombre de cure-dents formant n'importe quelle figure.	Salle de classe	Travail individuel	- Environ 15 minutes pour l'installation - 30 à 45 minutes pour répondre aux questions
	Problème 9 : La plus convaincante de toutes	Post(Ind)-9a : Classer plusieurs solutions (types de preuves) données au problème « Quelle solution est la plus convaincante? » Post(Ind)-9b : Expliquer son classement en a)			
	Problème 10 : Un nombre et son carré	Post(Ind)-10 : Identifier si la conjecture de la question est vraie ou fausse.			
Retour en grand groupe et institutionnalisation pour l'ensemble des activités					

Notes :

- Temps total pour l'ensemble des activités → environ 5h30
- Le temps indiqué pour les échanges dans le forum électronique est un minimum. Les élèves sont libres d'aller échanger dans le forum électronique dans leur temps libre (à l'école ou à la maison).
- Vous êtes libre de former les équipes (3 – 4 élèves) comme bon vous semble. Elles peuvent changer d'une activité à l'autre.
- Nous vous invitons à associer un pseudonyme à chaque élève au début de l'expérimentation. Ainsi, s'ils désirent donner un commentaire individuel dans le forum électronique, ils pourront le faire de façon « anonyme ».

Rôle de l'enseignant :

Lors de l'expérimentation, votre rôle est crucial, car vous servez de tremplin aux activités mathématiques proposées. Entre autres, il est primordial que vous relanciez sans cesse les élèves en les encourageant à aller plus loin dans leur réflexion. S'ils ne remettent pas en question le travail de leurs collègues, c'est à vous de le faire, mais surtout de les aider à le faire. Dès que l'activité est en branle et que les élèves savent ce qu'ils ont à faire, vous devenez donc, en quelque sorte, un acteur périphérique dont la tâche principale consiste à s'assurer que l'activité se déroule bien. Il vous revient également de maintenir des conditions qui permettent aux élèves de demeurer en activité (par exemple, questionner les élèves afin de les amener à approfondir leurs réflexions).

Suggestions pour l'utilisation du forum électronique :

Voici quelques suggestions concernant l'utilisation du forum électronique avec vos élèves :

- Utilisez un pseudonyme afin de conserver votre anonymat (idéalement, tentez de vous faire passer pour un élève).
- Donnez le temps aux élèves de répondre avant d'intervenir dans la discussion en ligne.
- Remettez en question les propos des élèves, même s'ils ont raison.
- Demandez aux élèves de préciser leurs réponses (surtout si elles ne sont pas claires).
- Proposez d'autres solutions (correctes et incorrectes) aux problèmes posés[135].

[135] Vous pouvez consulter la liste de solutions (correctes et incorrectes) qui vous a été remise. Vous pouvez également, si vous le désirez, inventer des solutions différentes de celles des élèves.

ANNEXE 10

Marche à suivre pour les enseignants du groupe contrôle

PRÉTEST

Travail individuel – Document : *Prétest*

- Demander aux élèves de répondre aux questions en lien avec le problème 1 (*Le nombre de cure-dents*), le problème 2 (*Quelle solution est la plus convaincante?*) ainsi que le problème 3 (*Deux nombres impairs consécutifs*).

(Voir les pages suivantes pour plus de détails sur les différentes activités)

ACTIVITÉ 1 - PROBLÈMES 1 ET 2

***** RETOUR EN GRAND GROUPE ET INSTITUTIONNALISATION DE L'ACTIVITÉ 1 *****

ACTIVITÉ 2 - PROBLÈMES 4 ET 5

***** RETOUR EN GRAND GROUPE ET INSTITUTIONNALISATION DU PROBLÈME 3 (PRÉTEST) ET DE L'ACTIVITÉ 2 *****

ACTIVITÉ 3 - PROBLÈMES 6

***** RETOUR EN GRAND GROUPE ET INSTITUTIONNALISATION DE L'ACTIVITÉ 3 *****

ACTIVITÉ 4 - PROBLÈMES 7

***** RETOUR EN GRAND GROUPE ET INSTITUTIONNALISATION DE L'ACTIVITÉ 4 *****

POST-TEST

Travail individuel – Document : *Post-test*

- Demander aux élèves de répondre aux questions en lien avec le problème 8 (*Des cercles et des carrés*), le problème 9 (*La plus convaincante de toutes*) ainsi que le problème 10 (*Un nombre et son carré*).

***** INSTITUTIONNALISATION POUR L'ENSEMBLE DES ACTIVITÉS *****

ACTIVITÉ 1 - PROBLÈMES 1 ET 2

Travail individuel – Document : *Activité 1 (Travail individuel)*
Problème 2 – *Qui a réussi à te convaincre?*

- Remettre le prétest aux élèves.
  Important : Ils ne doivent pas changer les réponses sur le prétest!
- Demander aux élèves de répondre à la question Act1(Eq)-2a
  Act1(Eq)-2a : Que penses-tu du classement que tu as suggéré au départ (sur le prétest)? Est-il correct? Dois-tu y apporter des changements? Explique ta réponse.

Travail d'équipe – Document : *Activité 1 (Travail d'équipe)*
Problème 1 – *Le nombre de cure-dents*

- Différentes solutions tirées des productions des élèves vous seront envoyées afin que les élèves soient en mesure de répondre aux questions Act1(Eq)-1a et Act1(Eq)-1b.
  Act1(Eq)-1a : Parmi les solutions proposées par vous et vos collègues, lesquelles avez- vous retenues? Expliquez votre réponse.
  Act1(Eq)-1b : Parmi les solutions proposées par vous et vos collègues, lesquelles avez- vous rejetées? Expliquez votre réponse.

Problème 2 – *Qui a réussi à te convaincre?*

- Amener les élèves à comparer le classement que chacun a suggéré à la question Pré(Ind)-2a
- Demander aux élèves de répondre aux questions Act1(Eq)-2b et Act1(Eq)-2c
  Act1(Eq)-2b : Par rapport au classement suggéré par chacun au départ, quels principaux changements ont été apportés? Pourquoi? Expliquez votre réponse.
  Act1(Eq)-2c : Quel est le classement final que vous suggérez?

*** RETOUR EN GRAND GROUPE ET INSTITUTIONNALISATION DE L'ACTIVITÉ 1 ***

ACTIVITÉ 2 - PROBLÈMES 4 ET 5

Travail individuel – Document : *Activité 2 (Travail individuel)*
Problème 4 – Bonne question!

- Demander aux élèves de répondre à la question Act2(Ind)-4
  Act2(Ind)-4 : Quelle réponse proposes-tu à cette question? Explique pourquoi.

Problème 5 – Vrai ou faux?

- Demander aux élèves de répondre à la question Act2(Ind)-5
  Act2(Ind)-5 : Quelle réponse proposes-tu à cette question? Explique pourquoi.

<u>Travail d'équipe</u> – Document : *Activité 2 (Travail d'équipe)*

Problème 4 – Bonne question!

- Amener les élèves à comparer leur solution à la question Act2(Ind)-4
- Demander aux élèves de répondre aux questions Act2(Eq)-4a et Act2(Eq)-4b

  Act2(Eq)-4a : Parmi les solutions proposées par votre équipe, lesquelles retenez-vous? Expliquez vos choix.

  Act2(Eq)-4b : Parmi les solutions proposées par votre équipe, lesquelles rejetez-vous? Expliquez vos choix.

Problème 5 – Vrai ou faux?

- Amener les élèves à comparer leur solution à la question Act2(Ind)-5
- Demander aux élèves de répondre aux questions Act2(Eq)-5a et Act2(Eq)-5b

  Act2(Eq)-5a : Parmi les solutions proposées par votre équipe, lesquelles retenez-vous? Expliquez vos choix.

  Act2(Eq)-5b : Parmi les solutions proposées par votre équipe, lesquelles rejetez-vous? Expliquez vos choix.

* RETOUR EN GRAND GROUPE ET INSTITUTIONNALISATION DU PROBLÈME 3 (PRÉTEST) ET DE L'ACTIVITÉ 2 *

ACTIVITÉ 3 - PROBLÈME 6

<u>Travail individuel</u> – Document : *Activité 3 (Travail individuel – Devoir à compléter à la maison)*

Problème 6 – Pierre et Paul

- <u>Devoir à compléter à la maison</u> : Demander aux élèves de répondre aux questions Act3(Ind)-6a et Act3(Ind)-6b

  Act3(Ind)-6a : Quelle réponse proposes-tu à cette question? Coche la case qui correspond à ta réponse.

  Act3(Ind)-6a : Quels sont les arguments que tu retiens pour appuyer ta solution? Autrement dit, qu'est-ce qui te permet de dire que quelqu'un a raison ou que quelqu'un a tort?

Travail d'équipe – Document : *Activité 3 (Travail d'équipe)*
Problème 6 – Pierre et Paul

- Amener les élèves à discuter sur ce qui leur a permis de faire leur choix lorsqu'ils ont complété le devoir.
- Demander aux élèves de répondre aux questions Act3(Eq)-6a et Act3(Eq)-6b

  Act3(Eq)-6a : Parmi les arguments qu'a utilisés chacun des membres de ton équipe, lesquels sont acceptés par vous tous (même si vous n'avez pas nécessairement trouvé la même réponse)?

  Act3(Eq)-6b : Parmi les arguments qu'a utilisés chacun des membres de ton équipe, y en a-t-il sur lesquels vous n'arrivez pas à vous entendre? Lesquels? Pourquoi?

*** RETOUR EN GRAND GROUPE ET INSTITUTIONNALISATION DE L'ACTIVITÉ 3 ***

ACTIVITÉ 4 - PROBLÈME 7

Travail individuel – Document : *Activité 4 (Travail individuel)*
Problème 7 – Les carreaux hachurés

- Demander aux élèves de répondre aux questions Act4(Ind)-7a et Act4(Ind)-7b

  Act4(Ind)-7a : Combien de carreaux hachurés y a-t-il dans la figure no 8?

  Act4(Ind)-7b : Donne une façon qui te permet de trouver le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quelle figure si elles sont toutes construites selon le même modèle.

Travail d'équipe – Document : *Activité 4 (Travail d'équipe)*
Problème 7 – Les carreaux hachurés

- Amener les élèves à comparer leurs solutions aux questions Act4(Ind)-7a et Act4(Ind)-7b
- Demander aux élèves de répondre aux questions Act4(Eq)-7a et Act4(Eq)-7b

  Act4(Eq)-7a : Parmi les solutions proposées par votre équipe, lesquelles retenez-vous? Expliquez votre réponse.

  Act4(Eq)-7b : Parmi les solutions proposées par votre équipe, lesquelles rejetez-vous? Expliquez votre réponse.

  - Êtes-vous d'accord avec le classement suggéré par vos collègues? Si vous n'êtes pas d'accord, expliquez pourquoi.

- Différentes solutions tirées des productions des élèves vous seront envoyées afin que les élèves soient en mesure de répondre aux deux questions ci-dessous.

  Act4(Eq)-7c : Observez attentivement les solutions proposées par vos collègues du Nouveau-Brunswick et du Québec. Classez ces solutions de la plus convaincante à la moins convaincante.

  Act4(Eq)-7d : Pourquoi avez-vous décidé de classer les solutions de cette façon? Pour chaque solution, expliquez ce qui est bien et ce qui est moins bien.

*** RETOUR EN GRAND GROUPE ET INSTITUTIONNALISATION DE L'ACTIVITÉ 4 ***

ANNEXE 11

Marche à suivre pour les enseignants du groupe expérimental

PRÉTEST

Travail individuel – Document : *Prétest*

- Demander aux élèves de répondre aux questions en lien avec le problème 1 (*Le nombre de cure-dents*), le problème 2 (*Quelle solution est la plus convaincante?*) ainsi que le problème 3 (*Deux nombres impairs consécutifs*).

(Voir les pages suivantes pour plus de détails sur les différentes activités)

ACTIVITÉ 1 - PROBLÈMES 1 ET 2

***** RETOUR EN GRAND GROUPE ET INSTITUTIONNALISATION DE L'ACTIVITÉ 1 *****

ACTIVITÉ 2 - PROBLÈMES 4 ET 5

***** RETOUR EN GRAND GROUPE ET INSTITUTIONNALISATION DU PROBLÈME 3 (PRÉTEST) ET DE L'ACTIVITÉ 2 *****

ACTIVITÉ 3 - PROBLÈMES 6

***** RETOUR EN GRAND GROUPE ET INSTITUTIONNALISATION DE L'ACTIVITÉ 3 *****

ACTIVITÉ 4 - PROBLÈMES 7

***** RETOUR EN GRAND GROUPE ET INSTITUTIONNALISATION DE L'ACTIVITÉ 4 *****

POST-TEST

Travail individuel – Document : *Post-test*

- Demander aux élèves de répondre aux questions en lien avec le problème 8 (*Des cercles et des carrés*), le problème 9 (*La plus convaincante de toutes*) ainsi que le problème 10 (*Un nombre et son carré*).

***** INSTITUTIONNALISATION POUR L'ENSEMBLE DES ACTIVITÉS *****

ACTIVITÉ 1 - PROBLÈMES 1 ET 2

Travail individuel – Document : *Activité 1 (Travail individuel)*
Problème 2 – *Qui a réussi à te convaincre?*
- Remettre le prétest aux élèves.
  Important : Ils ne doivent pas changer les réponses sur le prétest!
- Demander aux élèves de répondre à la question Act1(Eq)-2a
  - Act1(Eq)-2a : Que penses-tu du classement que tu as suggéré au départ (sur le prétest)? Est-il correct? Dois-tu y apporter des changements? Explique ta réponse.

Travail d'équipe – Document : *Activité 1 (Travail d'équipe)*
Problème 1 – *Le nombre de cure-dents*
- Différentes solutions tirées des productions des élèves vous seront envoyées afin que les élèves soient en mesure de répondre aux questions Act1(Eq)-1a et Act1(Eq)-1b.
  - Act1(Eq)-1a : Parmi les solutions proposées par vous et vos collègues, lesquelles avez- vous retenues? Expliquez votre réponse.
  - Act1(Eq)-1b : Parmi les solutions proposées par vous et vos collègues, lesquelles avez- vous rejetées? Expliquez votre réponse.

Problème 2 – *Qui a réussi à te convaincre?*
- Amener les élèves à comparer le classement que chacun a suggéré à la question Pré(Ind)-2a
- Demander aux élèves de répondre aux questions Act1(Eq)-2b et Act1(Eq)-2c
  - Act1(Eq)-2b : Par rapport au classement suggéré par chacun au départ, quels principaux changements ont été apportés? Pourquoi? Expliquez votre réponse.
  - Act1(Eq)-2c : Quel est le classement final que vous suggérez?

Forum électronique
Problème 1 – *Le nombre de cure-dents*
- Demander aux élèves d'écrire les solutions que leur équipe a retenues à la question Pré(Ind)-1
- Demander aux élèves de répondre aux deux questions ci-dessous :
  - Parmi les solutions que vos collègues du Nouveau-Brunswick et du Québec ont placées dans le forum électronique, y en a-t-il qui, à vos yeux, sont correctes? Lesquelles? Pourquoi les retenez-vous?
  - Parmi les solutions que vos collègues du Nouveau-Brunswick et du Québec ont placées dans le forum électronique, y en a-t-il avec lesquelles vous n'êtes pas d'accord? Pourquoi?

Problème 2 – *Qui a réussi à te convaincre?*
- Demander aux élèves d'écrire le classement que leur équipe a retenu à la question Act1(Eq)-2c

- Demander aux élèves de regarder les classements suggérés par les autres élèves et de répondre à la question suivante :
  - Êtes-vous d'accord avec le classement suggéré par vos collègues du Nouveau-Brunswick et du Québec? Si vous n'êtes pas d'accord, êtes-vous capables de les convaincre que votre classement est meilleur que le leur?

*** RETOUR EN GRAND GROUPE ET INSTITUTIONNALISATION DE L'ACTIVITÉ 1 ***

ACTIVITÉ 2 - PROBLÈMES 4 ET 5

Travail individuel – Document : *Activité 2 (Travail individuel)*
Problème 4 – Bonne question!
- Demander aux élèves de répondre à la question Act2(Ind)-4
  Act2(Ind)-4 : Quelle réponse proposes-tu à cette question? Explique pourquoi.

Problème 5 – Vrai ou faux?
- Demander aux élèves de répondre à la question Act2(Ind)-5
  Act2(Ind)-5 : Quelle réponse proposes-tu à cette question? Explique pourquoi.

Travail d'équipe – Document : *Activité 2 (Travail d'équipe)*
Problème 4 – Bonne question!
- Amener les élèves à comparer leur solution à la question Act2(Ind)-4
- Demander aux élèves de répondre aux questions Act2(Eq)-4a et Act2(Eq)-4b
  Act2(Eq)-4a : Parmi les solutions proposées par votre équipe, lesquelles retenez-vous? Expliquez vos choix.
  Act2(Eq)-4b : Parmi les solutions proposées par votre équipe, lesquelles rejetez-vous? Expliquez vos choix.

Problème 5 – Vrai ou faux?
- Amener les élèves à comparer leur solution à la question Act2(Ind)-5
- Demander aux élèves de répondre aux questions Act2(Eq)-5a et Act2(Eq)-5b
  Act2(Eq)-5a : Parmi les solutions proposées par votre équipe, lesquelles retenez-vous? Expliquez vos choix.
  Act2(Eq)-5b : Parmi les solutions proposées par votre équipe, lesquelles rejetez-vous? Expliquez vos choix.

Forum électronique

Problème 4 – Bonne question!

- Demander aux élèves d'écrire les solutions que leur équipe a retenues à la question Act2(Ind)-4 et d'expliquer leurs choix.
- Demander aux élèves de regarder les solutions proposées par les autres élèves à la question Act2(Ind)-4 et de répondre à la question suivante :
    - Êtes-vous d'accord avec les solutions proposées par vos collègues du Nouveau-Brunswick et du Québec? Si vous n'êtes pas d'accord avec eux, expliquez-leur pourquoi.

Problème 5 – Vrai ou faux?

- Demander aux élèves d'écrire les solutions que leur équipe a retenues à la question Act2(Ind)-5 et d'expliquer leurs choix.
- Demander aux élèves de regarder les solutions proposées par les autres élèves à la question Act2(Ind)-5 et de répondre à la question suivante :
    - Êtes-vous d'accord avec les solutions proposées par vos collègues du Nouveau-Brunswick et du Québec? Si vous n'êtes pas d'accord avec eux, expliquez-leur pourquoi.

* RETOUR EN GRAND GROUPE ET INSTITUTIONNALISATION DU PROBLÈME 3 (PRÉTEST) ET DE L'ACTIVITÉ 2 *

ACTIVITÉ 3 - PROBLÈME 6

Travail individuel – Document : *Activité 3 (Travail individuel – Devoir à compléter à la maison)*

Problème 6 – Pierre et Paul

- Devoir à compléter à la maison : Demander aux élèves de répondre aux questions Act3(Ind)-6a et Act3(Ind)-6b

  Act3(Ind)-6a : Quelle réponse proposes-tu à cette question? Coche la case qui correspond à ta réponse.

  Act3(Ind)-6a : Quels sont les arguments que tu retiens pour appuyer ta solution? Autrement dit, qu'est-ce qui te permet de dire que quelqu'un a raison ou que quelqu'un a tort?

<u>Travail d'équipe</u> – Document : *Activité 3 (Travail d'équipe)*
Problème 6 – Pierre et Paul

- Amener les élèves à discuter sur ce qui leur a permis de faire leur choix lorsqu'ils ont complété le devoir.
- Demander aux élèves de répondre aux questions Act3(Eq)-6a et Act3(Eq)-6b

  Act3(Eq)-6a : Parmi les arguments qu'a utilisés chacun des membres de ton équipe, lesquels sont acceptés par vous tous (même si vous n'avez pas nécessairement trouvé la même réponse)?

  Act3(Eq)-6b : Parmi les arguments qu'a utilisés chacun des membres de ton équipe, y en a-t-il sur lesquels vous n'arrivez pas à vous entendre? Lesquels? Pourquoi?

<u>Forum électronique</u>
Problème 6 – Pierre et Paul

- Demander aux élèves d'écrire la solution que leur équipe à choisie à la question Act3(Ind)-6a (parmi les quatre différents choix). Qui a raison… qui a tort entre Pierre et Paul?
- Demander aux élèves d'expliquer leur réponse (leur choix).
- Demander aux élèves de regarder les solutions proposées par les autres élèves à la question Act3(Ind)-6a et de répondre à la question suivante :
  - Que penses-tu des solutions proposées par tes collègues du Nouveau-Brunswick et du Québec? Es-tu en accord ou en désaccord avec eux? Pourquoi?

* RETOUR EN GRAND GROUPE ET INSTITUTIONNALISATION DE L'ACTIVITÉ 3 *

ACTIVITÉ 4 - PROBLÈME 7

<u>Travail individuel</u> – Document : *Activité 4 (Travail individuel)*
Problème 7 – Les carreaux hachurés

- Demander aux élèves de répondre aux questions Act4(Ind)-7a et Act4(Ind)-7b

  Act4(Ind)-7a : Combien de carreaux hachurés y a-t-il dans la figure no 8?

  Act4(Ind)-7b : Donne une façon qui te permet de trouver le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quelle figure si elles sont toutes construites selon le même modèle.

<u>**Travail d'équipe**</u> – Document : *Activité 4 (Travail d'équipe)*
Problème 7 – Les carreaux hachurés

- Amener les élèves à comparer leurs solutions aux questions Act4(Ind)-7a et Act4(Ind)-7b
- Demander aux élèves de répondre aux questions Act4(Eq)-7a et Act4(Eq)-7b
  - Act4(Eq)-7a : Parmi les solutions proposées par votre équipe, lesquelles retenez-vous? Expliquez votre réponse.
  - Act4(Eq)-7b : Parmi les solutions proposées par votre équipe, lesquelles rejetez-vous? Expliquez votre réponse.
    - Êtes-vous d'accord avec le classement suggéré par vos collègues? Si vous n'êtes pas d'accord, expliquez pourquoi.

- Différentes solutions tirées des productions des élèves vous seront envoyées afin que les élèves soient en mesure de répondre aux deux questions ci-dessous.
  - Act4(Eq)-7c : Observez attentivement les solutions proposées par vos collègues du Nouveau-Brunswick et du Québec. Classez ces solutions de la plus convaincante à la moins convaincante.
  - Act4(Eq)-7d : Pourquoi avez-vous décidé de classer les solutions de cette façon? Pour chaque solution, expliquez ce qui est bien et ce qui est moins bien.

<u>**Forum électronique**</u>
Problème 7 – Les carreaux hachurés

- Demander aux élèves d'écrire le classement final suggéré par leur équipe à la question Act4(Eq)-7c
- Demander aux élèves de regarder les classements suggérés par les autres élèves et de répondre à la question suivante :
  - Êtes-vous d'accord avec le classement suggéré par vos collègues du Nouveau-Brunswick et du Québec? Si vous n'êtes pas d'accord, essayez de les convaincre que votre classement est meilleur que le leur.

*** RETOUR EN GRAND GROUPE ET INSTITUTIONNALISATION DE L'ACTIVITÉ 4 ***

ANNEXE 12

Calendrier pour le groupe contrôle

Février 2009

Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi
1	2	3	4	5	6	7
8	**Prétest (9 au 11 février)** 9	10	11	12	13	14
15	**Activité 1 (16 au 20 février)** 16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

Important : L'institutionnalisation doit avoir lieu en conclusion du travail fait par les élèves (en tenant compte du travail fait en classe et des échanges avec leurs collègues). L'institutionnalisation peut donc avoir lieu à la fin d'une activité.

Mars 2009

Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi
1	2	3	Congé de mars (2 au 6 mars) 4	5	6	7
8	Activité 2 (9 au 13 mars) 9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	Activité 3 (23 au 27 mars) 23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Avril 2009

Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi
			1	2	3	4
5	Activité 4 – Questions 4.a), 4.b), 4.c) et 4.d) (6 au 10 avril) 6	7	8	9	10	11
12	13	14	Sélection de certaines solutions 15	16	17	18
19	Activité 4 – Questions 4.e) et 4.f) (20 au 24 avril) 20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

Mai 2009

Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24/31	25	26	27	28	29	30

Juin 2009

Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi
	Post-test (1er au 5 juin) 1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

ANNEXE 13

Calendrier pour le groupe contrôle

Février 2009

Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi
1	2	3	4	5	6	7
8	Prétest (9 au 11 février) 9	10	11	12	13	14
15	Activité 1 (16 au 20 février) 16	17	18	19	20	21
22	23	24	Échanges libres supplémentaires (23 au 27 février) 25	26	27	28

Important : L'institutionnalisation doit avoir lieu en conclusion du travail fait par les élèves (depuis le travail en classe jusqu'aux échanges électroniques). L'institutionnalisation peut donc avoir lieu lorsque les échanges en ligne portant sur une activité semblent s'épuiser.

Mars 2009

Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi
1	2	3	Congé de mars (2 au 6 mars) 4	5	6	7
8	Activité 2 (9 au 13 mars) 9	10	11	12	13	14
15	16	17	Échanges libres supplémentaires (16 au 20 mars) 18	19	20	21
22	Activité 3 (23 au 27 mars) 23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Avril 2009

Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi
			1	2	3	4
5	**Activité 4 – Questions 4.a), 4.b), 4.c) et 4.d) (6 au 10 avril)** 6	7	8	9	10	11
12	13	14	**Sélection de certaines solutions** 15	16	17	18
19	**Activité 4 – Questions 4.e) et 4.f) (20 au 24 avril)** 20	21	22	23	24	25
26	27	28	**Échanges libres supplémentaires (27 avril au 1er mai)** 29	30		

Mai 2009

Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24/31	25	26	27	28	29	30

Juin 2009

Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi
	Post-test (1er au 5 juin) 1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

ANNEXE 14

Message envoyé aux enseignants

L'automne prochain (septembre à décembre 2008), CASMI s'associe à l'Université de Montréal afin de participer à un projet intégrant les TIC et les mathématiques. Nous sommes donc à la recherche de deux enseignants du Nouveau-Brunswick et de deux enseignants du Québec désirant participer à ce projet avec leurs élèves (12 à 14 ans).

Détails sur la recherche :

Le développement de différents types de raisonnements occupe une place importante dans les programmes d'études du Québec et du Nouveau-Brunswick. Toutefois, malgré cette importance placée sur le développement de différents types de raisonnements, plusieurs élèves se voient confrontés à des difficultés lors du développement ou de l'évaluation de preuves.

Dans le cadre de ce projet, nous nous intéressons au développement de preuves dans un forum électronique. Plus précisément, nous désirons étudier dans quelle mesure l'utilisation d'un forum électronique, lors de la réalisation d'activités mathématiques, permet le développement d'habiletés de validation algébriques ainsi que le développement d'habiletés en lien avec l'évaluation de preuves en algèbre.

La participation au projet de recherche implique :

- l'administration d'un prétest auprès des élèves (environ 45 minutes);
- de septembre à décembre, la réalisation de quatre activités mathématiques en lien avec l'algèbre (une partie de ces activités se fait en salle de classe et une autre partie à la maison). Certains problèmes seront résolus individuellement et d'autres en équipe de deux. Les élèves devront également échanger avec leurs pairs au sujet de différents problèmes.
- l'administration d'un post-test auprès des élèves (environ 45 minutes);
- une entrevue avec la chercheuse (45 à 60 minutes).

Les échanges de deux des quatre groupes choisis auront lieu dans le forum électronique tandis que les échanges des deux autres groupes auront lieu en salle de classe.

Si vous désirez recevoir plus d'informations sur ce projet de recherche ou si vous souhaitez participer, veuillez communiquer avec Manon LeBlanc à l'adresse électronique suivante : [*adresse électronique de la chercheuse*]

Au plaisir de travailler avec vous à l'avancement des connaissances!
L'équipe du CASMI
Manon LeBlanc (Étudiante au doctorat en didactique des mathématiques, UdeMontréal)
Sophie René de Cotret (Professeure titulaire, UdeMontréal)

ANNEXE 15

Guide d'entretien semi-directif pour les enseignants (groupe contrôle)

Informations générales

1. Depuis combien d'années enseignez-vous les mathématiques?
   Pistes :
   - Niveau
   - Nombre d'années à chaque niveau

Mathématiques (notion de preuve)

2. Comment définiriez-vous ce qu'est une preuve?

3. Habituellement, comment vous y prenez-vous pour enseigner les notions en lien avec le développement de preuves?
   Pistes :
   - Résolution de problèmes suggérés dans les manuels scolaires
   - Échange entre les élèves
   - Discussion sur différentes solutions à un même problème

Réalisation des activités

4. Avez-vous complété toutes les activités en salle de classe?

5. Avez-vous opéré des modifications dans les activités avant de commencer à les intégrer en salle de classe?
   Pistes :
   - Travail individuel plutôt qu'en équipe de deux ou vice-versa
   - Temps accordé à chaque activité
   - Changement de données dans les problèmes proposés

6. Combien de temps, en moyenne, avez-vous réservé à chacune des activités?
   Pistes :
   - En salle de classe?
   - À l'école (à l'extérieur de la salle de classe)?
   - À la maison?

7. Qu'avez-vous fait comme retour en salle de classe (institutionnalisation) après chaque activité?

« Évaluation » des activités

8. Avez-vous vu des inconvénients à la réalisation de ces activités dans votre salle de classe?
   Pistes :
   En ce qui a trait :
   - au temps accordé à chaque activité
   - à la familiarisation avec de nouveaux problèmes

9. Avez-vous vu des avantages à la réalisation de ces activités dans votre salle de classe?
   Pistes :
   En ce qui a trait :
   - au travail fait à l'extérieur de la salle de classe (dans certains cas)
   - à la motivation chez les élèves
   - au souci de la rigueur chez les élèves

10. Avez-vous des suggestions pour améliorer les différentes activités?

11. Pensez-vous, dans les années à venir, refaire certaines de ces activités? Si oui, lesquelles et pourquoi? Sinon, pourquoi?

Apport des activités

12. D'après vos observations, qu'ont appris vos élèves en réalisant ces activités?

ANNEXE 16

Guide d'entretien semi-directif pour les enseignants (groupe expérimental)

Informations générales

1. Depuis combien d'années enseignez-vous les mathématiques?
   Pistes :
   - Niveau
   - Nombre d'années à chaque niveau

Mathématiques (notion de preuve)

2. Comment définiriez-vous ce qu'est une preuve?

3. Habituellement, comment vous y prenez-vous pour enseigner les notions en lien avec le développement de preuves?
   Pistes :
   - Résolution de problèmes suggérés dans les manuels scolaires
   - Échange entre les élèves
   - Discussion sur différentes solutions à un même problème

Intégration des TIC

4. Avant la participation à ce projet, aviez-vous déjà intégré les TIC à votre enseignement? Si oui, qu'avez-vous fait?
   Pistes :
   - Recherche dans Internet
   - Utilisation du chiffrier électronique (Excel)
   - Utilisation du traitement de texte (projet écrit)

5. Comment l'intégration du forum électronique s'est-elle faite chez vous?
   Pistes :
   - Facilement
     - déjà utilisé le forum dans CASMI
     - déjà utilisé un autre forum
   - Difficilement
     - jamais utilisé le forum dans CASMI
     - jamais utilisé un forum
     - difficulté à voir la pertinence du forum

6. Comment l'intégration du forum électronique s'est-elle faite chez les élèves?
   Pistes :
   a. Facilement
      i. déjà utilisé le forum dans CASMI
      ii. déjà utilisé un autre forum
   b. Difficilement
      i. jamais utilisé le forum dans CASMI
      ii. jamais utilisé un forum
      iii. difficulté à voir la pertinence de l'outil
      iv. difficulté à écrire rapidement

Réalisation des activités

7. Avez-vous complété toutes les activités en salle de classe?

8. Avez-vous opéré des modifications dans les activités avant de commencer à les intégrer en salle de classe?
   Pistes :
   - Travail individuel plutôt qu'en équipe de deux ou vice-versa
   - Temps accordé à chaque activité
   - Changement de données dans les problèmes proposés

9. Combien de temps, en moyenne, avez-vous réservé à chacune des activités?
   Pistes :
   - En salle de classe?
   - À l'école (à l'extérieur de la salle de classe)?
   - À la maison?

10. Lors de la mise sur pied des activités en salle de classe, quelles « suggestions pour l'utilisation du forum électronique » avez-vous prises en considération?
    Pistes :
    - Utilisez un pseudonyme afin de conserver votre anonymat (idéalement, tentez de vous faire passer pour un élève)
    - Donnez le temps aux élèves de répondre avant d'intervenir dans la discussion en ligne
    - Remettez en question les propos des élèves, même s'ils ont raison
    - Demandez aux élèves de préciser leurs réponses (surtout si elle n'est pas claire)
    - Proposez d'autres solutions (correctes et incorrectes) aux problèmes posés

13. Qu'avez-vous fait comme retour en salle de classe (institutionnalisation) après chaque activité?

<u>« Évaluation » des activités</u>

11. Avez-vous vu des inconvénients à la réalisation de ces activités dans votre salle de classe?
    Pistes :
    En ce qui a trait :
    - au temps accordé à chaque activité
    - à la familiarisation avec de nouveaux problèmes
    - à la familiarisation avec le forum électronique
    - à l'accès à des ordinateurs branchés

12. Avez-vous vu des avantages à la réalisation de ces activités dans votre salle de classe?
    Pistes :
    En ce qui a trait :
    - au travail fait à l'extérieur de la salle de classe (dans certains cas)
    - à l'intégration des TIC
    - à la motivation chez les élèves
    - au souci de la rigueur chez les élèves

13. Avez-vous des suggestions pour améliorer les différentes activités?

14. Pensez-vous, dans les années à venir, refaire certaines de ces activités? Si oui, lesquelles et pourquoi? Sinon, pourquoi?

<u>Apport des activités</u>

15. D'après vos observations, qu'ont appris vos élèves en réalisant ces activités?

<u>Apport du forum électronique</u>

16. Pensez-vous que l'utilisation du forum électronique a influencé les élèves dans la résolution de problèmes? Si oui, à quel niveau? Sinon, pourquoi pensez-vous que cela ne les a pas influencés?

17. Pensez-vous que l'utilisation du forum électronique a influencé les élèves dans le développement de preuves? Si oui, à quel niveau? Sinon, pourquoi pensez-vous que cela ne les a pas influencés?

18. Pensez-vous que l'utilisation du forum électronique a influencé les élèves dans l'évaluation de preuves? Si oui, à quel niveau? Sinon, pourquoi pensez-vous que cela ne les a pas influencés?

ANNEXE 17

Guide d'entretien semi-directif pour les élèves (groupe contrôle)

Informations générales

1. Quel âge avez-vous?

2. Quel est votre niveau scolaire?

Mathématiques (notion de preuve)

3. Qu'est-ce qui vous plait, qu'est-ce que vous aimez des mathématiques?

4. Qu'est-ce qui vous déplait, qu'est-ce que vous n'aimez pas (ou aimez moins) des mathématiques?

5. Si je vous demandais ce qu'est une preuve, que me diriez-vous?

6. Avant l'expérimentation, aviez-vous déjà travaillé la notion de preuve dans vos cours de mathématiques? Si oui, qu'avez-vous fait?

Réalisation des activités

7. Avez-vous participé à toutes les activités en salle de classe?

8. Combien de temps, en moyenne, avez-vous consacré à chacune des activités?
   Pistes :
   - En salle de classe?
   - À l'école (à l'extérieur de la salle de classe)?
   - À la maison?

« Évaluation » des activités

9. Avez-vous vu des inconvénients à la réalisation de ces activités dans votre salle de classe?
   Pistes :
   En ce qui a trait :
   - au temps accordé à chaque activité
   - à la familiarisation avec des nouveaux problèmes

10. Avez-vous vu des avantages à la réalisation de ces activités dans votre salle de classe?
    Pistes :
    En ce qui a trait :
    - au travail fait à l'extérieur de la salle de classe (dans certains cas)
    - à votre motivation
    - au souci de la rigueur

11. Pensez-vous que dans les années à venir certaines de ces activités devraient être refaites? Si oui, lesquelles? Sinon, pourquoi?

12. Avez-vous des suggestions pour améliorer les différentes activités?

Apport des activités

13. Qu'avez-vous appris en réalisant ces activités?

ANNEXE 18

Guide d'entretien semi-directif pour les élèves (groupe expérimental)

Informations générales

1. Quel âge avez-vous?

2. Quel est votre niveau scolaire?

Mathématiques (notion de preuve)

3. Qu'est-ce qui vous plait, qu'est-ce que vous aimez des mathématiques?

4. Qu'est-ce qui vous déplait, qu'est-ce que vous n'aimez pas (ou aimez moins) des mathématiques?

5. Si je vous demandais ce qu'est une preuve, que me diriez-vous?

6. Avant l'expérimentation, aviez-vous déjà travaillé la notion de preuve dans vos cours de mathématiques? Si oui, qu'avez-vous fait?

Intégration des TIC

7. Avant la participation à ce projet, aviez-vous déjà utilisé les TIC dans un cours de mathématiques? Si oui, dans quel cours et qu'aviez-vous fait?
   Pistes :
   - Recherche dans Internet
   - Utilisation du chiffrier électronique (Excel)
   - Utilisation du traitement de texte (projet écrit)

8. Comment l'intégration du forum électronique s'est-elle faite chez vous?
   Pistes :
   - Facilement
     - déjà utilisé le forum dans CASMI
     - déjà utilisé un autre forum
   - Difficilement
     - jamais utilisé un forum
     - difficulté à voir la pertinence du forum
     - difficulté à écrire rapidement

Réalisation des activités

9. Avez-vous participé à toutes les activités en salle de classe?

10. Combien de temps, en moyenne, avez-vous consacré à chacune des activités?

Pistes :

- En salle de classe?
- À l'école (à l'extérieur de la salle de classe)?
- À la maison?

<u>« Évaluation » des activités</u>

11. Avez-vous vu des inconvénients à la réalisation de ces activités dans votre salle de classe?
    Pistes :
    En ce qui a trait :
    - au temps accordé à chaque activité
    - à la familiarisation avec de nouveaux problèmes
    - à la familiarisation avec le forum électronique
    - à l'accès à des ordinateurs branchés

12. Avez-vous vu des avantages à la réalisation de ces activités dans votre salle de classe?
    Pistes :
    En ce qui a trait :
    - au travail fait à l'extérieur de la salle de classe (dans certains cas)
    - à l'intégration des TIC
    - à votre motivation
    - au souci de la rigueur

13. Pensez-vous que dans les années à venir certaines de ces activités devraient être refaites? Si oui, lesquelles? Sinon, pourquoi?

14. Avez-vous des suggestions pour améliorer les différentes activités?

<u>Apport des activités</u>

15. Qu'avez-vous appris en réalisant ces activités?

<u>Apport du forum électronique</u>

16. Pensez-vous que l'utilisation du forum électronique vous a influencé dans la résolution de problèmes? Si oui, comment cela vous a-t-il influencé? Sinon, pourquoi pensez-vous que cela ne vous a pas influencé?

17. Pensez-vous que l'utilisation du forum électronique vous a influencé dans le développement de preuves? Si oui, comment cela vous a-t-il influencé? Sinon, pourquoi pensez-vous que cela ne vous a pas influencé?

18. Pensez-vous que l'utilisation du forum électronique vous a influencé dans l'évaluation de preuves? Si oui, comment cela vous a-t-il influencé? Sinon, pourquoi pensez-vous que cela ne vous a pas influencé?

ANNEXE 19

Suggestions pour l'utilisation du forum électronique

Voici quelques suggestions concernant l'utilisation du forum électronique avec vos élèves :

- Utilisez un pseudonyme afin de conserver votre anonymat (idéalement, tentez de vous faire passer pour un élève).
- Donnez le temps aux élèves de répondre avant d'intervenir dans la discussion en ligne.
- Remettez en question les propos des élèves, même s'ils ont raison.
- Demandez aux élèves de préciser leurs réponses (surtout si elles ne sont pas claires).
- Proposez d'autres solutions (correctes et incorrectes) aux problèmes posés.

ANNEXE 20

Certificat d'éthique

Université de Montréal

COMITÉ PLURIFACULTAIRE D'ÉTHIQUE DE LA RECHERCHE (CPÉR)

CERTIFICAT D'ÉTHIQUE

Le Comité plurifacultaire d'éthique de la recherche a examiné le projet de recherche intitulé :

« Étude de situations de validation vécues par des élèves de 12 à 14 ans à l'aide d'un forum de discussion »

Soumis par : **Manon LeBlanc**
Directrice de recherche : **Sophie René de Cotret**

Le Comité a conclu que le projet respecte les normes de déontologie énoncées à la « Politique sur la recherche avec les êtres humains » de l'Université de Montréal.

Tout changement anticipé au protocole de recherche doit être communiqué au CPÉR qui devra en évaluer l'impact au chapitre de l'éthique afin de déterminer si une nouvelle demande de certificat d'éthique est nécessaire.

Toute interruption prématurée du projet ou tout incident grave devra être immédiatement signalé au CPÉR.

9/09/08

François Bowen, Président
Comité plurifacultaire d'éthique de la recherche
Université de Montréal

Date d'émission

ETH 2008-45

ANNEXE 21

Formulaire de consentement des enseignants – Groupe contrôle

FORMULAIRE DE CONSENTEMENT DE L'ENSEIGNANT

Titre de la recherche : Étude de situations de validation vécues par des élèves de 13 et 14 ans à l'aide d'un forum électronique

Chercheuse : Manon LeBlanc, étudiante au doctorat, Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal

Directeur de recherche : Sophie René de Cotret, professeur titulaire, Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal

A) RENSEIGNEMENTS AUX PARTICIPANTS

1. Objectifs de la recherche.

Ce projet vise à étudier dans quelle mesure l'utilisation d'un forum électronique, lors de la réalisation d'activités mathématiques, permet le développement d'habiletés de validation algébriques ainsi que le développement d'habiletés en lien avec l'évaluation du processus de preuves en algèbre chez des élèves de 13 et 14 ans.

2. Participation à la recherche

La participation à cette recherche consiste à :

- administrer un prétest et un post-test à vos élèves (environ 45 minutes pour chaque test).

- mettre en pratique quatre activités mathématiques dans votre salle de classe (une partie des activités sera réalisée en salle de classe et l'autre à la maison - environ 1h au total pour chacune des activités). Ces activités porteront sur l'algèbre. Les élèves auront à résoudre certains problèmes individuellement et d'autres en équipe.

- rencontrer la chercheuse pour une entrevue de 45 à 60 minutes à un moment et dans un lieu que vous choisirez. Cette entrevue portera sur la façon dont vous avez vécu la réalisation des activités mathématiques. L'entrevue sera enregistrée puis transcrite.

3. Confidentialité

Les renseignements que vous nous donnerez demeureront confidentiels. Les entrevues seront transcrites et les enregistrements effacés. Chaque participant à la recherche se verra attribuer un numéro et seules la chercheuse principale et/ou la personne mandatée à cet effet auront la liste des participants et des numéros qui leur auront été attribués. De plus, les renseignements seront conservés dans un classeur sous clé situé dans un bureau fermé. Aucune information permettant de vous identifier d'une façon ou d'une autre ne sera publiée. Ces renseignements personnels seront détruits 7 ans après la fin du projet. Seules les données ne permettant pas de vous identifier seront conservées après cette date, le temps nécessaire à leur utilisation.

4. Avantages et inconvénients

En participant à cette recherche, vous ne courez pas de risques ou d'inconvénients particuliers, mais vous pourrez contribuer à l'avancement des connaissances sur l'utilisation des technologies de l'information et de la communication (TIC) lors de situations de validation algébriques. Vous recevrez également quatre activités (total de huit problèmes) que vous pourrez réaliser en salle de classe.

5. Droit de retrait

Votre participation est entièrement volontaire. Vous êtes libre de vous retirer en tout temps sur simple avis verbal, sans préjudice et sans devoir justifier votre décision. Si vous décidez de vous retirer de la recherche, vous pouvez communiquer avec la chercheuse au numéro de téléphone ou à l'adresse électronique indiqués ci-dessous. Si vous vous retirez de la recherche, les renseignements qui auront été recueillis au moment de votre retrait seront détruits.

6. Indemnité

Les participants ne recevront aucune indemnité.

7. Diffusion des résultats

Une copie de ma thèse présentant les conclusions de cette recherche sera transmise aux enseignants dès qu'elle sera disponible (automne 2009). Un rapport présentant les principaux résultats ainsi que les retombées pédagogiques du projet sera disponible, sur demande, aux parents des élèves ayant participé à notre recherche.

B) CONSENTEMENT

Je déclare avoir pris connaissance des informations ci-dessus, avoir obtenu les réponses à mes questions sur ma participation à la recherche et comprendre le but, la nature, les avantages, les risques et les inconvénients de cette recherche.

Après réflexion et un délai raisonnable, je consens à participer à cette étude. Je sais que je peux me retirer en tout temps, sur simple avis verbal, sans aucun préjudice.

	Oui	Non
Je consens à ce que les données anonymisées recueillies dans le cadre de cette étude soient utilisées pour des projets de recherche subséquents, conditionnellement à leur approbation éthique et dans le respect des mêmes principes de confidentialité et de protection des informations	☐	☐

Signature : ______________________ Date : ______________________
Nom : ______________________ Prénom : ______________________

Je déclare avoir expliqué le but, la nature, les avantages, les risques et les inconvénients de l'étude et avoir répondu au meilleur de ma connaissance aux questions posées.

Signature du chercheur
(ou de son représentant) : ______________________ Date : ______________
Nom : LeBlanc Prénom : Manon

Pour toute question relative à l'étude, ou pour vous retirer de la recherche, vous pouvez communiquer avec Manon LeBlanc, au numéro de téléphone suivant : [*numéro de téléphone de la chercheuse*] ou à l'adresse courriel [*adresse électronique de la chercheuse*]

Toute plainte relative à votre participation à cette recherche peut être adressée à l'ombudsman de l'Université de Montréal, au numéro de téléphone (514) 343-2100 ou à l'adresse courriel suivante: ombudsman@umontreal.ca **(l'ombudsman accepte les appels à frais virés).**

ANNEXE 22

Formulaire de consentement des enseignants – Groupe expérimental

FORMULAIRE DE CONSENTEMENT DE L'ENSEIGNANT

Titre de la recherche : Étude de situations de validation vécues par des élèves de 13 et 14 ans à l'aide d'un forum électronique

Chercheuse : Manon LeBlanc, étudiante au doctorat, Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal

Directeur de recherche : Sophie René de Cotret, professeur titulaire, Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal

A) RENSEIGNEMENTS AUX PARTICIPANTS

1. Objectifs de la recherche.

Ce projet vise à étudier dans quelle mesure l'utilisation d'un forum électronique, lors de la réalisation d'activités mathématiques, permet le développement d'habiletés de validation algébriques ainsi que le développement d'habiletés en lien avec l'évaluation du processus de preuves en algèbre chez des élèves de 13 et 14 ans.

2. Participation à la recherche

La participation à cette recherche consiste à :

- amener les élèves à interagir entre eux à l'aide d'un forum électronique dans le but de développer des habiletés à valider ou à invalider des énoncés (se prononcer sur la validité de productions);

- administrer un prétest et un post-test à vos élèves (environ 45 minutes pour chaque test).

- mettre en pratique quatre activités mathématiques dans votre salle de classe (une partie des activités sera réalisée en salle de classe et l'autre à la maison - environ 1h au total pour chacune des activités). Ces activités porteront sur l'algèbre. Les élèves auront à résoudre certains problèmes individuellement et d'autres en équipe. Ils devront également échanger avec leurs pairs dans un forum électronique au sujet de différents problèmes.

- rencontrer la chercheuse pour une entrevue de 45 à 60 minutes à un moment et dans un lieu que vous choisirez. Cette entrevue portera sur la façon dont vous avez vécu la réalisation des activités mathématiques avec le forum électronique. L'entrevue sera enregistrée puis transcrite.

3. Confidentialité

Les renseignements que vous nous donnerez demeureront confidentiels. Les échanges qui prendront place dans le forum électronique seront limités aux personnes participant à la recherche. Les traces de ces échanges ne seront visibles que par les participants, la chercheuse principale et l'administrateur du site. Les entrevues seront transcrites et les enregistrements effacés. Chaque participant à la recherche se verra attribuer un numéro et seules la chercheuse principale et/ou la personne mandatée à cet effet auront la liste des participants et des numéros qui leur auront été attribués. De plus, les renseignements seront conservés dans un classeur sous clé situé dans un bureau fermé. Aucune information permettant de vous identifier d'une façon ou d'une autre ne sera publiée. Ces renseignements personnels seront détruits 7 ans après la fin du projet. Seules les données ne permettant pas de vous identifier seront conservées après cette date, le temps nécessaire à leur utilisation.

4. Avantages et inconvénients

En participant à cette recherche, vous ne courez pas de risques ou d'inconvénients particuliers, mais vous pourrez contribuer à l'avancement des connaissances sur l'utilisation des technologies de l'information et de la communication (TIC) lors de situations de validation algébriques.

En plus de recevoir quatre activités (total de huit problèmes) à réaliser en salle de classe, votre participation à la recherche pourra également vous donner l'occasion de vous familiariser avec l'utilisation d'un forum électronique.

5. Droit de retrait

Votre participation est entièrement volontaire. Vous êtes libre de vous retirer en tout temps sur simple avis verbal, sans préjudice et sans devoir justifier votre décision. Si vous décidez de vous retirer de la recherche, vous pouvez communiquer avec la chercheuse au numéro de téléphone ou à l'adresse électronique indiqués ci-dessous. Si vous vous retirez de la recherche, les renseignements qui auront été recueillis au moment de votre retrait seront détruits.

6. Indemnité

Les participants ne recevront aucune indemnité.

7. Diffusion des résultats

Une copie de ma thèse présentant les conclusions de cette recherche sera transmise aux enseignants dès qu'elle sera disponible (automne 2009). Un rapport présentant les principaux résultats ainsi que les retombées pédagogiques du projet sera disponible, sur demande, aux parents des élèves ayant participé à notre recherche.

B) CONSENTEMENT

Je déclare avoir pris connaissance des informations ci-dessus, avoir obtenu les réponses à mes questions sur ma participation à la recherche et comprendre le but, la nature, les avantages, les risques et les inconvénients de cette recherche.

Après réflexion et un délai raisonnable, je consens à participer à cette étude. Je sais que je peux me retirer en tout temps, sur simple avis verbal, sans aucun préjudice.

	Oui	Non
Je consens à ce que les données anonymisées recueillies dans le cadre de cette étude soient utilisées pour des projets de recherche subséquents, conditionnellement à leur approbation éthique et dans le respect des mêmes principes de confidentialité et de protection des informations	☐	☐

Signature : ______________________ Date : ______________________
Nom : ______________________ Prénom : ______________________

Je déclare avoir expliqué le but, la nature, les avantages, les risques et les inconvénients de l'étude et avoir répondu au meilleur de ma connaissance aux questions posées.

Signature du chercheur
(ou de son représentant) : ______________________ Date : ______________
Nom : LeBlanc Prénom : Manon

Pour toute question relative à l'étude, ou pour vous retirer de la recherche, vous pouvez communiquer avec Manon LeBlanc, au numéro de téléphone suivant : [*numéro de téléphone de la chercheuse*] ou à l'adresse courriel [*adresse électronique de la chercheuse*]

Toute plainte relative à votre participation à cette recherche peut être adressée à l'ombudsman de l'Université de Montréal, au numéro de téléphone (514) 343-2100 ou à l'adresse courriel suivante: ombudsman@umontreal.ca **(l'ombudsman accepte les appels à frais virés).**

ANNEXE 23

Formulaire de consentement des parents – Groupe contrôle

FORMULAIRE DE CONSENTEMENT DU PARENT

Note : Nous vous invitons à lire ce questionnaire avec votre enfant.

Titre de la recherche : Étude de situations de validation vécues par des élèves de 13 et 14 ans à l'aide d'un forum électronique

Chercheuse : Manon LeBlanc, étudiante au doctorat, Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal

Directeur de recherche : Sophie René de Cotret, professeur titulaire, Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal

A) RENSEIGNEMENTS AUX PARTICIPANTS

1. Objectifs de la recherche.

Ce projet vise à étudier dans quelle mesure l'utilisation d'un forum électronique en ligne permet aux élèves de 13 et 14 ans d'améliorer leurs habiletés pour évaluer et pour développer des preuves en algèbre.

2. Participation à la recherche

La participation de votre enfant à cette recherche consiste à :

- répondre à un prétest (questionnaire composé de deux questions – environ 45 minutes) et à un post-test (questionnaire composé de deux questions – environ 45 minutes) portant sur l'algèbre.

- réaliser quatre activités mathématiques (une partie en salle de classe, dans le cadre normal du cours et une partie à la maison – environ 1h au total pour chacune des activités). Ces activités porteront sur l'algèbre. Ils auront à résoudre certains problèmes individuellement et d'autres en équipe de deux. Ils devront également échanger avec leurs pairs au sujet de différents problèmes.

- <u>possiblement</u> rencontrer la chercheuse pour une entrevue de 45 minutes, à l'école, à un moment que vous et votre enfant choisirez (à l'extérieur des heures de classe). Cette entrevue portera sur la façon dont votre enfant a vécu la réalisation des activités mathématiques. L'entrevue sera enregistrée puis transcrite. (Note : seuls quatre élèves par classe seront interviewés.)

3. Confidentialité

Les renseignements que votre enfant nous donnera demeureront confidentiels. Les entrevues seront transcrites et les enregistrements effacés. Chaque participant à la recherche se verra attribuer un numéro et seules la chercheuse principale et/ou la personne mandatée à cet effet auront la liste des participants et des numéros qui leur auront été attribués. De plus, les entrevues transcrites et les résultats des élèves aux diverses évaluations (ex. : prétest et post-test) seront conservés dans un classeur sous clé situé dans un bureau fermé. Aucune information permettant d'identifier votre enfant d'une façon ou d'une autre ne sera publiée. Ces renseignements personnels seront détruits 7 ans après la fin du projet. Seules les données ne permettant pas d'identifier votre enfant seront conservées après cette date, le temps nécessaire à leur utilisation.

4. Avantages et inconvénients

En participant à cette recherche, votre enfant ne court pas de risques ou d'inconvénients particuliers mais pourra contribuer à l'avancement des connaissances sur l'utilisation des technologies de l'information et de la communication (TIC) lors de situations de validation algébriques.

5. Droit de retrait

La participation à ce projet est entièrement volontaire. Votre enfant est libre de se retirer en tout temps sur simple avis verbal, sans préjudice et sans devoir justifier sa décision. Si votre enfant décide de se retirer de la recherche, vous pouvez communiquer avec la chercheuse au numéro de téléphone ou à l'adresse électronique indiqués ci-dessous. Si votre enfant se retire de la recherche, les renseignements qui auront été recueillis au moment de son retrait seront détruits.

6. Indemnité

Les participants ne recevront aucune indemnité.

7. Diffusion des résultats

Une copie de ma thèse présentant les conclusions de cette recherche sera transmise aux enseignants dès qu'elle sera disponible (automne 2009). Un rapport présentant les principaux résultats ainsi que les retombées pédagogiques du projet sera disponible, sur demande, aux parents des élèves ayant participé à notre recherche.

B) CONSENTEMENT

Je déclare avoir pris connaissance des informations ci-dessus, avoir obtenu les réponses à mes questions sur ma participation à la recherche et comprendre le but, la nature, les avantages, les risques et les inconvénients de cette recherche.

Après réflexion et un délai raisonnable, je consens à ce que mon enfant participe à cette étude. Je sais que mon enfant peut se retirer en tout temps, sans préjudice.

	Oui	Non
Je consens à ce que les données anonymisées recueillies dans le cadre de cette étude soient utilisées pour des projets de recherche subséquents, conditionnellement à leur approbation éthique et dans le respect des mêmes principes de confidentialité et de protection des informations	☐	☐

Signature : ____________________ Date : ____________________

Nom : ____________________ Prénom : ____________________

Je déclare avoir expliqué le but, la nature, les avantages, les risques et les inconvénients de l'étude et avoir répondu au meilleur de ma connaissance aux questions posées.

Signature du chercheur
(ou de son représentant) : ____________________ Date : ____________________

Nom : LeBlanc Prénom : Manon

Pour toute question relative à l'étude, ou si votre enfant désire se retirer de la recherche, vous pouvez communiquer avec Manon LeBlanc, au numéro de téléphone suivant : [*numéro de téléphone de la chercheuse*] ou à l'adresse courriel [*adresse électronique de la chercheuse*]

Toute plainte relative à votre participation à cette recherche peut être adressée à l'ombudsman de l'Université de Montréal, au numéro de téléphone (514) 343-2100 ou à l'adresse courriel suivante: ombudsman@umontreal.ca **(l'ombudsman accepte les appels à frais virés).**

ANNEXE 24

Formulaire de consentement des parents – Groupe expérimental

FORMULAIRE DE CONSENTEMENT DU PARENT

Note : Nous vous invitons à lire ce questionnaire avec votre enfant.

Titre de la recherche :	Étude de situations de validation vécues par des élèves de 13 et 14 ans à l'aide d'un forum électronique
Chercheuse :	Manon LeBlanc, étudiante au doctorat, Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal
Directeur de recherche :	Sophie René de Cotret, professeur titulaire, Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal

A) RENSEIGNEMENTS AUX PARTICIPANTS

1. Objectifs de la recherche.

Ce projet vise à étudier dans quelle mesure l'utilisation d'un forum électronique en ligne permet aux élèves de 13 et 14 ans d'améliorer leurs habiletés pour évaluer et pour développer des preuves en algèbre.

2. Participation à la recherche

La participation de votre enfant à cette recherche consiste à :

- répondre à un prétest (questionnaire composé de deux questions – environ 45 minutes) et à un post-test (questionnaire composé de deux questions – environ 45 minutes) portant sur l'algèbre.

- réaliser quatre activités mathématiques (une partie en salle de classe, dans le cadre normal du cours et une partie à la maison – environ 1h au total pour chacune des activités). Ces activités porteront sur l'algèbre. Ils auront à résoudre certains problèmes individuellement et d'autres en équipe de deux. Ils devront également échanger avec leurs pairs dans un forum électronique en ligne au sujet de différents problèmes.

- possiblement rencontrer la chercheuse pour une entrevue de 45 minutes, à l'école, à un moment que vous et votre enfant choisirez (à l'extérieur des heures de classe). Cette entrevue portera sur la façon dont votre enfant a vécu la réalisation des activités mathématiques avec le forum électronique. L'entrevue sera enregistrée puis transcrite. (Note : seuls quatre élèves par classe seront interviewés.)

3. Confidentialité

Les renseignements que votre enfant nous donnera demeureront confidentiels. Les échanges qui prendront place dans le forum électronique seront limités aux personnes participant à la recherche. Les traces de ces échanges ne seront visibles que par les participants, la chercheuse principale et l'administrateur du site. Les entrevues seront transcrites et les enregistrements effacés. Chaque participant à la recherche se verra attribuer un numéro et seules la chercheuse principale et/ou la personne mandatée à cet effet auront la liste des participants et des numéros qui leur auront été attribués. De plus, les traces des échanges dans le forum électronique, les entrevues transcrites et les résultats des élèves aux diverses évaluations (ex. : prétest et post-test) seront conservés dans un classeur sous clé situé dans un bureau fermé. Aucune information permettant d'identifier votre enfant d'une façon ou d'une autre ne sera publiée. Ces renseignements personnels seront détruits 7 ans après la fin du projet. Seules les données ne permettant pas d'identifier votre enfant seront conservées après cette date, le temps nécessaire à leur utilisation.

4. Avantages et inconvénients

En participant à cette recherche, votre enfant ne court pas de risques ou d'inconvénients particuliers mais pourra contribuer à l'avancement des connaissances sur l'utilisation des technologies de l'information et de la communication (TIC) lors de situations de validation algébriques.

Sa participation à la recherche pourra également lui donner l'occasion de se familiariser avec l'utilisation d'un forum électronique.

5. Droit de retrait

La participation à ce projet est entièrement volontaire. Votre enfant est libre de se retirer en tout temps sur simple avis verbal, sans préjudice et sans devoir justifier sa décision. Si votre enfant décide de se retirer de la recherche, vous pouvez communiquer avec la chercheuse au numéro de téléphone ou à l'adresse électronique indiqués ci-dessous. Si votre enfant se retire de la recherche, les renseignements qui auront été recueillis au moment de son retrait seront détruits.

6. Indemnité

Les participants ne recevront aucune indemnité.

7. Diffusion des résultats

Une copie de ma thèse présentant les conclusions de cette recherche sera transmise aux enseignants dès qu'elle sera disponible (automne 2009). Un rapport présentant les principaux résultats ainsi que les retombées pédagogiques du projet sera disponible, sur demande, aux parents des élèves ayant participé à notre recherche.

B) CONSENTEMENT

Je déclare avoir pris connaissance des informations ci-dessus, avoir obtenu les réponses à mes questions sur ma participation à la recherche et comprendre le but, la nature, les avantages, les risques et les inconvénients de cette recherche.

Après réflexion et un délai raisonnable, je consens à ce que mon enfant participe à cette étude. Je sais que mon enfant peut se retirer en tout temps, sans préjudice.

	Oui	Non
Je consens à ce que les données anonymisées recueillies dans le cadre de cette étude soient utilisées pour des projets de recherche subséquents, conditionnellement à leur approbation éthique et dans le respect des mêmes principes de confidentialité et de protection des informations	☐	☐

Signature : ______________________ Date : ______________________
Nom : ______________________ Prénom : ______________________

Je déclare avoir expliqué le but, la nature, les avantages, les risques et les inconvénients de l'étude et avoir répondu au meilleur de ma connaissance aux questions posées.

Signature du chercheur
(ou de son représentant) : ______________________ Date : ______________
Nom : LeBlanc Prénom : Manon

Pour toute question relative à l'étude, ou si votre enfant désire se retirer de la recherche, vous pouvez communiquer avec Manon LeBlanc, au numéro de téléphone suivant : [*numéro de téléphone de la chercheuse*] ou à l'adresse courriel [*adresse électronique de la chercheuse*]

Toute plainte relative à votre participation à cette recherche peut être adressée à l'ombudsman de l'Université de Montréal, au numéro de téléphone (514) 343-2100 ou à l'adresse courriel suivante: ombudsman@umontreal.ca **(l'ombudsman accepte les appels à frais virés).**

ANNEXE 25

Pourcentage d'élèves de chacun des deux groupes qui associent une preuve à un rang donné à la question Pré(Ind)-2a

Tableau XCVI. Pourcentage d'élèves de chacun des deux groupes qui associent une preuve à un rang donné à la question Pré(Ind)-2a (groupe contrôle = 56 et groupe expérimental = 53)

	Groupe contrôle					Groupe expérimental				
	1er rang	2e rang	3e rang	4e rang	5e rang	1er rang	2e rang	3e rang	4e rang	5e rang
0. Aucune précision	0	0	0	2	0	2	2	2	0	0
1. Empirisme naïf (s4)	14	22	21	23	20	19	15	11	25	30
2. Expérience cruciale (et calcul sur les énoncés) (s2)	18	23	20	29	11	9	21	30	19	19
3. Exemple générique (s5)	18	7	7	23	44	7	8	19	30	36
4. Expérience mentale (s3)	36	25	25	5	7	38	28	15	9	7,5
5. Calcul sur les énoncés (s1)	14	23	27	18	18	25	26	23	17	7,5
Total	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

ANNEXE 26

Pourcentage d'élèves de chacun des deux groupes qui associent une preuve à un rang donné à la question Act1(Eq)-2c

Tableau XCVII. Pourcentage d'élèves de chacun des deux groupes qui associent une preuve à un rang donné à la question Act1(Eq)-2c (groupe contrôle = 51 et groupe expérimental = 53) [136]

	Groupe contrôle					Groupe expérimental				
	1er rang	2e rang	3e rang	4e rang	5e rang	1er rang	2e rang	3e rang	4e rang	5e rang
0. Aucune précision	8	8	8	8	8	44	43	44	43	43
1. Empirisme naïf (s4)	6	2	21	31	33	9	6	17	21	4
2. Expérience cruciale (s2)	4	18	33	29	8	13	11	13	13	6
3. Exemple générique (s5)	14	10	8	18	41	6	8	0	15	28
4. Expérience mentale (s3)	47	29	16	0	0	19	23	9	6	0
5. Calcul sur les énoncés (s1)	21	33	14	14	10	9	9	17	2	19
Total	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

[136] Bien que le travail soit fait en équipe, les résultats sont présentés pour chacun des élèves. Cette décision repose sur le fait que dans certaines équipes, le consensus n'est pas atteint. Les résultats sont présentés de cette façon pour toutes les activités où les élèves travaillent en équipe.

ANNEXE 27

Pourcentage d'élèves de chacun des deux groupes qui associent une preuve à un rang donné à la question Post(Ind)-9a

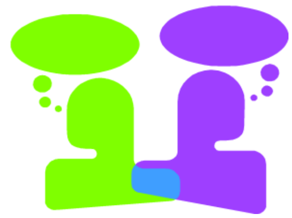
Tableau XCIX. Pourcentage d'élèves de chacun des deux groupes qui associent une preuve à un rang donné à la question Post(Ind)-9a (groupe contrôle = 59 et groupe expérimental = 53)

	Groupe contrôle					Groupe expérimental				
	1er rang	2e rang	3e rang	4e rang	5e rang	1er rang	2e rang	3e rang	4e rang	5e rang
0. Aucune précision	2	2	4	3	2	2	2	2	2	4
1. Empirisme naïf (s4)	67	12	12	5	2	28	15	32	21	2
2. Expérience cruciale (s5)	2	60	10	17	8	9	20	15	26	26
3. Exemple générique (s3)	5	8	20	14	51	15	23	15	13	32
4. Expérience mentale (s1)	7	10	22	37	20	21	23	15	19	19
5. Calcul sur les énoncés (s2)	17	8	32	24	17	25	17	21	19	17
Total	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

ANNEXE 28

Conseils donnés aux élèves du groupe expérimental pour débattre dans le forum électronique

QUAND TU RÉAGIS À UN MESSAGE SUR LE FORUM :



1) **Indique si tu es d'accord ou non.**

2) **<u>Si tu es d'accord</u> :**
   - indique ce qui t'a convaincu dans ce message.
     ou
   - donne un autre argument pour appuyer cette réponse.
     ou
   - si tu as procédé autrement, explique ce que tu as fait.

   <u>Si tu n'es pas d'accord</u> :
   - indique ce qui ne convient pas dans ce message.
     ou
   - donne un argument pour montrer que la personne a tort.
     ou
   - si tu as procédé autrement, explique ce que tu as fait.

ANNEXE 29

Pourcentage d'élèves de chacun des deux groupes qui associent une preuve à un rang donné à la question Act4(Eq)-7c

Tableau XCVIII. Pourcentage d'élèves de chacun des deux groupes qui associent une solution à un rang donné à la question Act4(Eq)-7c (groupe contrôle = 59 et groupe expérimental = 46)

	Groupe contrôle					Groupe expérimental				
	1er rang	2e rang	3e rang	4e rang	5e rang	1er rang	2e rang	3e rang	4e rang	5e rang
Aucune précision	1	0	2	0	0	2	2	2	2	2
Expression algébrique (s1)	36	22	7	17	17	33	13	0	13	39
Expression algébrique et calculs (s2)	19	17	39	26	0	22	28	13	24	11
Explication d'un calcul à faire (s3)	12	5	25	37	20	0	16	41	20	22
Calcul, explication d'un calcul à faire, un seul dessin et expression algébrique (s4)	12	2	10	20	56	13	13	24	30	17
Règle à suivre et tableau de valeurs (s5)	20	54	17	0	7	30	28	20	11	9
Total	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100